и минимумов, где знаки некоторых гармоник должны меняться, все равно всегда в решении имеются $\omega_i^2 > 0$ и решения неустойчивы. Таким образом, за ОВ-максимумом все решения неустойчивы. Более строгое доказательство изложенных выше утверждений можно найти в книге Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965).

§ 8. О решениях с положительной энергией

В этом параграфе мы снова возвращаемся к вопросу о положительной энергии равновесной звезды. В релятивистской теории, где масса и энергия звезды есть только разное выражение одного и того же свойства, положительность энергии означает, что $\Delta_2 M < 0$.

Для устойчивых звезд, возникших из диффузного вещества, гравитационный дефект массы $\Delta_2 M > 0$. Однако в общем случае нельзя заранее высказать определенное утверждение о знаке $\Delta_2 M = 4\pi \int_0^R (mne^{\lambda/2} - \rho)\, r^2 dr$ в равновесной конфигурации, ибо, с одной стороны, $nm < \rho$ благодаря энергии движения и взаимодействия нуклонов, с другой стороны, $e^{\lambda/2} \geqslant 1$. Вопрос о знаке $\Delta_2 M$ должен решаться конкретным расчетом моделей звезд.

Модели с отрицательным $\Delta_2 M$ заведомо не могут возникнуть путем конденсации диффузного вещества. В принципе это не исключает возможность осуществления такого состояния за счет выделения ядерной энергии: энергетически возможно осуществление состояния, энергия которого меньше энергии разреженного водорода, но больше энергии разреженных, разлетевшихся на бесконечность паров железа. В таком состоянии тело, очевидно, неустойчиво в том смысле, что оно может взорваться и целиком разлететься. Однако чтобы судить о возможности существования такого тела, необходимо исследовать его устойчивость относительно малых возмущений.

Образование тела с положительной энергией в ходе эволюции звезды представляется мало вероятным (хотя это не выходит за рамки физических законов), но тело в неустойчивом состоянии относительно малых возмущений следует считать вообще неспособным к существованию.

Интерес к состоянию с положительной энергией, притом в сугубо релятивистской области, при плотности во много раз больше ядерной, Саакян (1965) связал с концепцией Амбарцумяна (1960), согласно которой эволюция идет от сверхплотного состояния к диффузному; состояния с положительной энергией способны взрываться и переходить из плотного состояния в диффузное. Необходимо подчеркнуть, однако, что равновесные состояния с положительной энергией существуют лишь с массой не более $2-3\, M_\odot$ и не имеют отношения к грандиозным взрывам ядер галактик и сверхзвезд. Мы подробно останавливаемся на этом вопросе только потому, что он часто обсуждается в литературе.

Рассмотрим зависимость массы звезды M от числа нуклонов в ней. Во-первых, ясно, что эта кривая выходит из нуля: $N = 0$, $M = 0$. Кроме того, в § 7 гл. 10 показано, что $\frac{dM}{dN} < m$. Отсюда на первый взгляд следует, что всегда $M < N \cdot m$ и $\Delta_2 M > 0$. Однако это не так.

Кривые $M(\rho_c)$ и $N(\rho_c)$ проходят через максимум при одном и том же $\rho_{кр}$, а $\frac{dM}{dN}$ везде конечна и не имеет особенностей (см. § 7 гл. 10). Отсюда следует, что зависимость M от N будет иметь точку возврата, соответствующую общему максимуму M и N. Эта зависимость изображена на рис. 47 по данным Саакяна и Вартаняна (1964) для сверхплотных конфигураций*). Везде на кривой $\frac{dM}{dN} < m$, но имеется участок, где $Nm > M$ и $\Delta_2 M < 0$. Разумеется, эти конфигурации неустойчивы и малые возмущения заставляют звезду сжиматься или расширяться. При разлете массы звезды вещество будет иметь на бесконечности отличную от нуля кинетическую энергию.

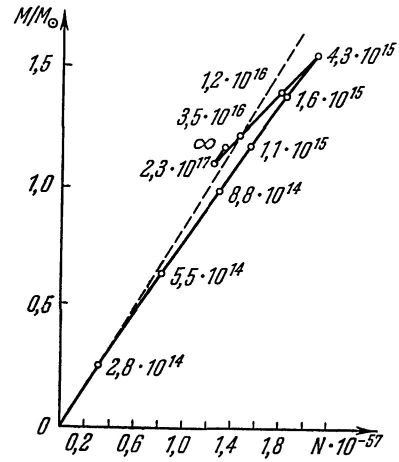

Рис. 47. Зависимость массы холодной звезды от полного числа барионов N. Рядом с кружочками указана плотность звезды в центре. Пунктирная линия — $M = Nm_H$.

Физическая причина того, что $\Delta_2 M < 0$, состоит в следующем. При очень большой плотности энергия движения и отталкивания барионов существенно больше их энергии покоя $\rho > mn$. Поэтому, несмотря на то, что учет отрицательной энергии гравитационного поля несколько снижает это различие, все же

$$\Delta_2 M = \int_V (mn - \rho e^{-\lambda/2}) dV < 0.$$

Учет отрицательной энергии поля описывается $e^{-\lambda/2}$. На рис. 47 видно существование решений с $\Delta_2 M < 0$ для уравнений

*) В соответствии с замечанием, сделанным в § 5 этой главы, кривые $M(\rho_c)$ и $N(\rho_c)$ имеют неограниченное число максимумов; при $\rho_c \to \infty$ амплитуда M и N затухает; соответствующее число точек возврата имеется на кривой $M = M(N)$. На рис. 47 видна еще точка возврата $2,3 \cdot 10^{17}$; следующие не показаны из-за мелкости масштаба.

состояния реального газа. Это видно также на кривой α_2 рис. 45. На рис. 43 кривые $M_{\odot}$ и M для идеального газа, пересекаются, т. е. и в этом случае $\Delta_2 M < 0$ при $\rho_c \gtrsim 5 \cdot 10^{16}$.

Ясно, что равновесные решения с отрицательной энергией связи должны быть неустойчивы. Более того, устойчивость относительно малых возмущений теряется в точке наибольшей (положительной) энергии связи, поэтому конфигурации с отрицательной энергией связи должны лежать глубоко в области неустойчивости.

В какой степени на эту ситуацию влияют законы ОТО? В простейшем случае нерелятивистской теории для степенного уравнения состояния $P = A\rho^\gamma$ (теория Лейна — Эмдена, ср. § 2) энергия связи пропорциональна $\gamma - 4/3$, т. е. величине, которая определяет устойчивость относительно малых возмущений. В этом случае также существуют решения с отрицательной энергией связи, и они неустойчивы. Отрицательная энергия связи служит критерием неустойчивости относительно определенного типа возмущения — разброса материи звезды на бесконечность. Всегда ли это подразумевает неустойчивость относительно малых возмущений, как предполагалось в нескольких приведенных выше примерах (случаи Оппенгеймера — Волкова, Лейна — Эмдена)? Оказывается, нет, как это показывает следующий контрпример нерелятивистского равновесного решения с отрицательной энергией связи, которое устойчиво относительно малых возмущений. Возьмем «испорченное» уравнение состояния

$$P = A\rho^\gamma, \quad \rho > \rho_*; \quad P = A\rho_*^\gamma \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1+\xi}, \quad \rho < \rho_*,$$

$$E = \frac{1}{\gamma - 1} A\rho^{\gamma-1} + A\rho_*^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\gamma-1}\right) = \frac{1}{\gamma-1} A\rho^{\gamma-1} + E_*, \quad \rho > \rho_*,$$

$$E_1 = \frac{1}{\xi} A\rho_*^{\gamma-1}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^\xi, \quad \rho < \rho_*.$$

Пусть A и γ имеют «нормальные» значения с $\gamma > 4/3$. Возьмем теперь предельный случай этого уравнения состояния, который получается, когда ξ и ρ_* стремятся к нулю, но так, что $E_* = A\rho_*^{\gamma-1}\left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\gamma-1}\right]$ остается конечной. Тогда весь объем звезды описывается решением Эмдена, соответствующем «нормальному» значению γ, а энергия содержит аддитивную постоянную ME_*.

Используя формулы § 2 и приложение II, можно получить следующую формулу для энергии связи звезды, состоящей из вещества с приведенным выше уравнением состояния

$$E_{\text{полн}} = -\frac{3-n}{5-n}\frac{GM^2}{R} + ME_* = -\frac{3\gamma-4}{5\gamma-6}\frac{GM^2}{R} + ME_*.$$

Здесь R — радиус, который имела бы звезда, если бы уравнение состояния в простейшей форме $P = A\rho^\gamma$ было справедливо везде.

В нашем случае очень малых ρ_* и ξ мы имеем $\rho \approx \rho_*$ при $r = R$. Вне этого радиуса при $\rho < \rho_*$ простирается атмосфера; условие существования конечного внешнего радиуса R_1 атмосферы кладет предел на E_*. Пренебрегая массой атмосферы, мы можем использовать гравитационный потенциал в виде $\varphi = -\frac{GM}{r}$ и получить

$$H + \varphi = (1+\xi)E - \frac{GM}{r} = (1+\xi)E_* - \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R_1} < 0,$$

так что $E_* < \frac{GM}{R_1}$, что означает

$$E_{\text{полн}} < \frac{2(\gamma-1)}{5\gamma-6}\frac{GM^2}{6}.$$

Поскольку $\gamma > 4/3$, то этого достаточно для конструирования решений, которые устойчивы относительно малых возмущений, но имеют отрицательную энергию связи.

Рассмотрим мысленный эксперимент, в котором такая конфигурация гомологично расширяется. Сначала ее энергия растет, но затем начинает падать, когда плотность массы достигает значений $\langle\bar{\rho}\rangle \sim \rho_*$; это и есть тот энергетический барьер, который обеспечивает устойчивость относительно малых возмущений *). Если по расчетам модель атмосферы звезды не имеет конечного внешнего радиуса R_1 (и не взрывается), то звезды теряют вещество посредством звездного ветра (Бисноватый-Коган и Зельдович, 1966). Это простейший пример непрерывной адиабатической потери массы.

§ 9. Нестабильность любого равновесного состояния

В заключение обсуждения вопросов устойчивости сделаем два замечания принципиального характера.

Для звезд, состоящих из холодного ферми-газа, имеющих число нуклонов $N < N_{\max}$, отвечающего ОВ-максимуму, всегда существует одно или несколько статических решений. Среди них есть решение с наименьшей полной энергией. Оно устойчиво к малым возмущениям. Значит ли это, что нельзя так перегруппировать нуклоны (не изменяя их числа!), чтобы получившаяся конфигурация (заведомо нестатическая) имела полную энергию (а значит, и массу M) меньше исходной? Ниже мы покажем, что такой вывод был бы неверен, что минимум энергии, отвечающий стационарному состоянию, есть только локальный минимум (Зельдович, 1962).

*) Ситуация, аналогичная этой, действительно имеет место в некоторых моделях нейтронных звезд: см., например, модели нейтронных звезд малой массы в табл. 3 работы Хартли и Торна (1968), которые имеют отрицательную энергию связи, но устойчивы относительно малых возмущений.