§ 2. Падение невзаимодействующих частиц

Представим себе частицы с массой m, скорость которых вдали от звезды одинакова и равна v_∞, а концентрация n_∞. Сначала рассмотрим задачу в ньютоновском приближении. Пусть скорость v_∞ мала по сравнению с параболической:

$$v_\infty \ll v_p = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

здесь R — радиус звезды. Тогда скорость у поверхности звезды не отличается от параболической, а следовательно, максимальный угловой момент, при котором происходит захват, $I_{\max} = mv_pR$. Выражая момент на бесконечности через прицельный параметр $l: I = mv_\infty l$, найдем $l_{\max}$, соответствующий падению на край звезды:

$$l_{\max} = R\frac{v_p}{v_\infty}.$$

Поток частиц с $l < l_{\max}$, есть, очевидно, $j = nv_\infty \pi l^2_{\max}$. Следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = mnv_\infty \pi R^2 v_\infty^{-2}\frac{2GM}{R} = \pi r_g^2 c\rho_\infty \frac{c}{v_\infty}\frac{R}{r_g}, \tag{12.2.1}$$

где $\rho_\infty = mn_\infty$. В связи с формулой (12.2.1) отметим, что в ньютоновскую теорию скорость света и гравитационный радиус никак не входят. Лишь в целях сравнения с последующими формулами для коллапсаров в последнем выражении путем деления и умножения на c выделены множители r_g и c. В ОТО критическое значение момента *) равно 2 (см. § 8 гл. 3), чему соответствует

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r_g^2 c\rho_\infty \frac{c}{v_\infty}. \tag{12.2.2}$$

Итак, при $R/r_g < 4$ пользоваться нерелятивистской формулой уже нельзя; выражение (12.2.2) дает нижнюю границу dM/dt и описывает аккрецию на застывшие и достаточно плотные нейтронные звезды (у последних $R/r_g \geqslant 1{,}7$, см. Цурута, Камерон (1965)). Запись (12.2.2) в более удобных единицах имеет вид

$$\frac{d\,(M/M_\odot)}{d\,(t/10^{10}\text{ лет})} = 10^{-13}\left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24}\ г/см^3}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{v_\infty}{10\ км/сек}\right)^{-1}. \tag{12.2.3}$$

Для частиц, строго покоящихся на бесконечности, нет разумного (стационарного) ответа, формулы дают ∞. Действительно, если

---

*) Влияние гравитационного излучения на эффективность захвата пропорционально m/M (§ 11 гл. 3), а потому пренебрежимо.

в область, занятую покоящимися частицами, внезапно поместить притягивающую их массу, то частицы начнут ускоренно двигаться по радиусам и легко убедиться, что поток на поверхность будет расти с течением времени по закону

$$\frac{dM}{dt} = \frac{64}{3\pi}\rho_\infty GMt. \qquad (12.2.4)$$

Вернемся, однако, к стационарной картине с $v_\infty > 0$. Как должна меняться плотность невзаимодействующих частиц в зависимости от расстояния до звезды? Рассмотрим случай $r \gg R$, пренебрегая отличием рассматриваемой задачи от задачи о равновесном распределении частиц в заданном потенциальном поле. Отличие, которым мы пренебрегаем, связано, очевидно, с тем, что частицы, попавшие на поверхность звезды, не покидают ее, имеется необратимый поток. В угловом распределении скоростей в данной точке отсутствуют частицы в том телесном угле, в который приходили бы частицы, пересекшие прозрачную звезду (потенциальную яму, заменяющую звезду) в строго равновесной задаче. При $r \gg R$ этот угол мал.

В рассматриваемом приближении частицы, которые на бесконечности изотропно распределены по направлениям скорости и имеют энергию, заключенную между E_∞ и $E_\infty + \Delta E$, образуют микроканонический ансамбль. По теореме Лиувилля объем, приходящийся на одну частицу в фазовом пространстве, постоянен: $\Delta\Gamma = 4\pi n^{-1}p^2\Delta p$. Учитывая, что $E = p^2(r)/2m + m\varphi(r) = \text{const}$, $\Delta E = p\Delta p/m = \text{const}$, найдем, что $\Delta\Gamma = 4\pi mn^{-1}p\Delta E = \text{const}$ и

$$n = n_\infty \frac{p}{p_\infty} = n_\infty \sqrt{1 + \frac{GMm}{rE_\infty}}. \qquad (12.2.5)$$

Таким образом, до некоторого радиуса $r = r_c$, на котором кинетическая энергия частиц становится порядка их гравитационной энергии, плотность частиц практически не меняется, при $r < r_c$ имеем $n \propto r^{-1/2}$. Всюду далее радиус r_c мы будем называть «критическим радиусом».

Следует обратить внимание на то, что полученная нами формула не дает полного ответа на поставленный вопрос. Действительно, она относится лишь к частицам, пришедшим из бесконечности, т. е. обладающим $E > 0$. Однако в ситуации, когда столкновения полностью выключены, вокруг притягивающего центра может находиться неограниченное число частиц с $E < 0$. Речь идет о частицах, движущихся по эллиптическим орбитам: их плотность есть произвольная функция, никак не связанная с (12.2.5) и определяемая начальными условиями.

Задачу можно конкретизировать следующим образом. Введем достаточно малое сечение взаимодействия частиц между собой

$\sigma \neq 0$; тогда распределение частиц с $E < 0$ по эллиптическим орбитам станет однозначно определяться распределением частиц с $E > 0$ на бесконечности. Совершая предельный переход $\sigma \to 0$, получим вполне определенную функцию:

$$n(r,\ E < 0) = n_\infty f(E_\infty, E).$$

Когда $\sigma \to 0$, плотность частиц стремится к фиксированному пределу.

Отметим, что в пределе $\sigma \to 0$ для потока частиц мы найдем, разумеется, прежнее выражение (12.2.2). При $\sigma \neq 0$ поток dM/dt есть растущая функция сечения, ибо столкновения гасят тангенциальные скорости частиц. Мы не будем, однако, искать эту зависимость для произвольного σ, а обратимся сразу к противоположному предельному случаю очень больших сечений, когда газ можно рассматривать как сплошную среду (соответствующие критерии приведены в § 4). Уравнения газодинамики должны описывать при этом как аккрецию вещества на звезду, так и истечение со звезды.

§ 3. Четыре режима газодинамического течения в случае сферической симметрии

Будем характеризовать газ показателем адиабаты $\gamma = \mathrm{const}$ плотностью ρ, давлением P и скоростью звука $a = \sqrt{\gamma P/\rho}$. Выделим узкий конус с телесным углом $d\Omega$ и запишем закон сохранения вещества ($d\tilde{S}$ — поток в конусе $d\Omega$, A — поток на единицу телесного угла, он конечен и не зависит от радиуса в стационарной задаче)

$$d\tilde{S} = \rho u r^2 d\Omega = \mathrm{const}, \quad u = \frac{A}{\rho r^2}, \quad A = \frac{d\tilde{S}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{dM}{dt}, \tag{12.3.1}$$

а также закон Бернулли, выражающий сохранение энергии:

$$-\frac{GM}{r} + \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = \mathrm{const} \equiv B. \tag{12.3.2}$$

Уравнение (12.3.2) предполагает отсутствие теплообмена, однако приближенно последний может быть учтен заданием подходящего γ. Константа B определяется граничными условиями. В случае аккреции их удобно задать на бесконечности, где газ покоится:

$$B = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_\infty}{\rho_\infty}; \tag{12.3.3}$$

в случае истечения мы определим их у поверхности звезды при $r = R$:

$$B = -\frac{GM}{R} + \frac{u_R^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_R}{\rho_R}, \tag{12.3.4}$$