Однако в ходе эволюции звезда не попадает сразу вглубь области неустойчивости. Очевидно, что звезда возникает как устойчивый объект, ее эволюция также начинается в области устойчивости. Прежде чем попасть в область неустойчивости, звезда должна пересечь границу этих областей. Можно показать (см. об этом далее), что на границе устойчивости линейной теории недостаточно, и всегда возникает именно катастрофическое сжатие, а не расширение, которое вернуло бы звезду в устойчивое состояние.

Сделаем еще одно существенное замечание. Вдали от границы потери устойчивости, как мы видели выше, скорость изменения энтропии звезды много меньше, чем скорость установления гидродинамического равновесия. На границе потери устойчивости эти скорости становятся одинаковыми, поэтому в области устойчивости при подходе к ее границам надо, строго говоря, применять уравнения гидродинамики для расчета эволюции (конечно, лишь в непосредственной близости к границе).

Уже одного взгляда на рис. 34 достаточно, чтобы почувствовать, какое значение имеет для теории эволюции звезды понятие механической неустойчивости. Перейдем теперь к более детальному описанию нарисованной выше картины.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 1

Покажем, что в ньютоновской теории условие экстремума полной энергии звезды (при неизменном химическом составе и сохранении энтропии в каждом элементе) есть условие гидростатического равновесия. Полная энергия звезды при условии отсутствия макроскопических движений записывается в виде

$$\mathrm{E} = \int_0^r E_1(S, \rho)\, dm - \int_0^M \frac{Gm\, dm}{r}, \qquad (10.1.1п)$$

где $m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\, dr$ — масса внутри сферы радиуса r.

Воспользуемся термодинамическим тождеством

$$P = -\left(\frac{\partial E_1}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right)_{S=\mathrm{const}}, \qquad (10.1.2п)$$

где P — давление, и вычислим первую вариацию полной энергии:

$$\delta\mathrm{E} = \int_0^M \frac{P}{\rho^2}\, \delta\rho dm + G\int_0^M \frac{mdm}{r^2}\, \delta r. \qquad (10.1.3п)$$

Преобразуем первый интеграл в (10.1.3п):

$$\int_0^M \frac{P}{\rho^2}\,\delta\rho\,dm = -\int_0^M P\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)dm = -\int_0^M P\delta\left(4\pi r^2\frac{dr}{dm}\right)dm =$$

$$= -\int_0^M 8\pi P\frac{dr}{dm}r\delta r\,dm - \int_0^M 4\pi P r^2\,\delta\left(\frac{dr}{dm}\right)dm =$$

$$= -\int_0^M 8\pi P\frac{dr}{dm}r\delta r\,dm + \int_0^M 4\pi\frac{d}{dm}(Pr^2)\,\delta r\,dm =$$

$$= \int_0^M 4\pi r^2\frac{dP}{dm}\,\delta r\,dm = \int_0^M \frac{dP}{\rho dr}\delta r\,dm.$$

Подставляя полученное выражение в (10.1.3п) и приравнивая $\delta\mathrm{E} = 0$, находим

$$\frac{dP}{dr} + \frac{\rho G m}{r^2} = 0,$$

т. е. уравнение гидростатического равновесия. Таким образом, действительно, условие экстремума энергии есть просто условие гидростатического равновесия.

Запишем теперь выражение для полной энергии звезды, не предполагая равенства нулю скоростей движения вещества звезды:

$$\mathrm{E} = \int_0^M\left[E_1(S,\rho) - \frac{Gm}{r} + \frac{u^2}{2}\right]dm,$$

где u — скорость элемента массы. Очевидно, что найденное выше состояние при котором имеется экстремум энергии, будет устойчивым, если экстремум — минимум. Действительно, из него не может возникнуть никакое другое состояние, ни с $u = 0$, ни тем более с $u^2 > 0$.

Следовательно, исследование устойчивости сводится к нахождению условий, при которых $\delta^2\mathrm{E} > 0$. Ограничимся состоянием покоя, $u = 0$.

В выражении для второй вариации коэффициент при $(\delta r')^2$, где $r' = \dfrac{dr(m)}{dm}$, пропорционален $\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\dfrac{\partial E_1}{\partial\rho} = \dfrac{\partial P}{\partial\rho}$. Поэтому необходимым условием устойчивости является $\dfrac{\partial P}{\partial\rho} > 0$, иначе, взяв малое, но высокочастотное (т. е. часто колеблющееся, как функция r) δr так, что $(\delta r)^2$ мало́, а $(\delta r')^2$ велико, можно было бы получить $\delta^2\mathrm{E} < 0$.

Физический смысл этого условия очевиден: вещество с $\dfrac{\partial P}{\partial\rho} < 0$ неустойчиво при данном давлении, безотносительно к гравитации.

В учебниках вариационного исчисления [например, Гельфанд; Фомин, (1961)] доказывается, что при выполнении $\dfrac{\partial P}{\partial\rho} > 0$ необходимым и достаточным условием определенного знака второй вариации $\delta^2\mathrm{E}$ является непересечение соседних экстремалей, т. е. решений уравнений, получающихся из условия $\delta\mathrm{E} = 0$.

Переводя эту теорему на язык рассматриваемой задачи, получаем следующее условие устойчивости звезды. Пусть $r_0(m)$ есть равновесное решение, отвечающее полной массе M_0; при этом на краю звезды, т. е. при $m = M_0$, должно быть выполнено естественное условие $P = 0$. Пусть $r_1(m)$ есть решение, отвечающее другой массе M_1, близкой к M_0. Тогда решение устойчиво, если при всех m

$$\frac{r_1(m) - r_0(m)}{M_1 - M_0} < 0. \qquad (10.1.4\text{п})$$

Следовательно, для устойчивости нужно, чтобы при увеличении массы ($M_1 - M_0 = \Delta > 0$), т. е. при добавлении массы Δ снаружи, каждый внутренний элемент массы приблизился к центру ($\Delta r = r_1 - r_0 < 0$).

Такое условие является весьма естественным и его можно рассматривать как некое обобщение условия $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$. Объем звезды и каждой ее части должен уменьшаться при наложении внешнего давления. Вместе с тем важно отметить, что это условие получено не интуитивно, а является точным математическим утверждением, полное формальное доказательство которого дано, например, в указанном выше учебнике Гельфанда и Фомина.

При интегрировании уравнения равновесия удобно задаться плотностью в центре. Тогда в результате интегрирования получается зависимость $M(\rho_c)$. Так как при малых m

$$r(m) = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_c}\right)^{1/3}, \qquad (10.1.5\text{п})$$

то легко убедиться, что условие (10.1.4п) будет удовлетворено лишь при $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$.

Таким образом, дано строгое доказательство того, что решения, расположенные на спадающей ветви кривой $M(\rho_c)$ там, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, являются неустойчивыми относительно малых возмущений. Этот результат был получен выше в основном тексте параграфа весьма грубым способом, и его точное подтверждение является аргументом в пользу качественной правильности грубого рассмотрения. Вместе с тем надо отметить, что выполнение $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$ является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для устойчивости. В части звезды вещество может иметь $\gamma < 4/3$, и звезда останется устойчивой, должно быть лишь $\gamma > 0$. Как найти эффективное среднее γ, которое позволило бы судить об устойчивости решения? Построение пары кривых $r_0(m)$ и $r_1(m)$ для близких ρ_{c0} и ρ_{c1}, которым соответствуют близкие M_0 и M_1, позволяет всегда вполне однозначно проверить устойчивость по выполнению (10.1.4п) при всех m и, таким образом, дает точное, исчерпывающее и практически удобное решение вопроса. Другой способ доказательства того, что максимум кривой $M(\rho_c)$ играет роль границы устойчивости, дан в конце § 7 гл. 10. Обзор других точных методов определения устойчивости, справедливых как в ОТО, так и в ньютоновской теории, дан Торном (1967).

§ 2. Аналитическая теория политропных газовых сфер (теория Лейна — Эмдена)

а. *Общие соотношения.* Ньютоновская теория гидростатического равновесия в частном случае

$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+1/n}, \qquad (10.2.1)$$