Как уже подчеркивалось, для наших целей особенно важны критические состояния, а для состояний, далеких от критического, вполне достаточно приближенных оценок. По этой причине в дальнейшем используется однопараметрический метод.

## ПРИЛОЖЕНИЕ к § 2

Вывод теоремы вириала и выражения для гравитационной энергии с помощью вариационного принципа

Ниже с помощью вариационного принципа будут получены два полезных соотношения:

1) между полной энергией звезды и ее гравитационной энергией (теорема вириала) и

2) между радиусом звезды и ее гравитационной энергией.

Эти соотношения относятся к звезде, состоящей из вещества с политропическим уравнением состояния $P = A\rho^{1+1/n}$; из этого уравнения состояния следует, что энергия единицы массы $E_1 = nA\rho^{1/n} = nP/\rho$ (за нуль принята энергия вещества, охлажденного путем адиабатического расширения до нулевой плотности). Для первого соотношения несущественно, является ли $A = A(S)$ постоянной по звезде, для второго соотношения постоянство $A$ необходимо. Оба соотношения хорошо известны в классической теории равновесия звезд (см. формулы (10.1.11) — (10.1.13)), где они выводятся из дифференциального уравнения равновесия. Вывод этих соотношений из вариационного принципа (ВП) полезен как упражнение на применение ВП, а также и потому, что смысл соотношений предстает в новом свете.

Итак, записываем полную энергию звезды в виде

$$\mathrm{E} = \int E_1(m)\,dm - G\int \frac{m\,dm}{r} = W + U,$$

где $m$ — масса, расположенная внутри данного слоя, а интегрирование ведется от $m = 0$ (центр звезды) до $m = M$ (наружная поверхность, $M$ — полная масса звезды). Смысл обозначений: $W$ — внутренняя энергия всего вещества, $U$ — гравитационная энергия. При этом

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Распределение плотности полностью определено, если задана функция $r(m)$, т. е. задано расстояние от центра сферы, заключающей массу вещества $m$. В терминах гидродинамики $r$ есть эйлерова координата, $m$ — разновидность лагранжевой координаты частицы. Зная $r(m)$, найдем

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dr}{dm}\right)^{-1}.$$

Удельная энергия вещества зависит от плотности.

Согласно вариационному принципу в состоянии равновесия $\mathrm{E}$ имеет минимум *) при данной массе $M$. Следовательно, при любом изменении $r(m)$ первая производная $\mathrm{E}$ равна нулю.

*) Минимум соответствует устойчивому равновесию. Для дальнейшего достаточно, чтобы $\mathrm{E}$ было экстремально.

Рассмотрим гомологическое преобразование, т. е. подобное $r(m) = ar_0(m)$ расширение ($a > 1$) или сжатие ($a < 1$) звезды, и найдем

$$\frac{dE}{da}\bigg|_{a=1} = \int \frac{dE_1}{d\rho}(-3\rho)\,dm + G\int \frac{m\,dm}{r_0} = 0.$$

При $E_1 = A_1\rho^{1/n}$ получим

$$\frac{dE}{da}\bigg|_{a=1} = -\frac{3}{n}W - U = 0;\quad W = -\frac{n}{3}U,\qquad E = W + U = \frac{3-n}{3}U.$$

При произвольном уравнении состояния

$$\frac{dE_1}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{dE_1}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{P}{\rho^2},$$

$$\int \frac{dE}{d\rho}(-3\rho)\,dm = -3\int P\frac{dm}{\rho} = -3\int dV$$

и мы получаем

$$U = -3\int P\,dV.$$

Теперь рассмотрим звезды, в которых $E_1 = nA\rho^{1/n}$ и $A$ постоянно; см. § 2, раздел а. Из размерности очевидно, что распределение плотности в таких звездах при различной массе подобно (распределение может зависеть только от безразмерной величины $n$; из $A$ и $G$ нельзя построить безразмерной комбинации). Поэтому

$$E = ManA\rho_c^{1/n} - Gb\frac{M^2}{\left(\frac{M}{\rho_c}\right)^{1/3}} = \alpha M\rho_c^{1/n} - \beta M^{5/3}\rho_c^{1/3}.$$

Из условия равновесия находим

$$\frac{dE}{d\rho_c} = \frac{1}{n}\alpha M\rho_c^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{3}\beta M^{\frac{5}{3}}\rho_c^{\frac{1}{3}-1} = 0,$$

$$\rho_c = \left(\frac{n}{3}\frac{\beta}{\alpha}M^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3n}{3-n}} = \gamma M^{\frac{2n}{3-n}}.$$

Заметим, что при $n < 3$, т. е. для устойчивого равновесия, с ростом $M$ всегда увеличивается плотность в центре $\rho_c$. Для радиуса звезды имеем $R \sim \left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \sim M^{\frac{3(1-n)}{3-n}}$. Следовательно, при $1 < n < 3$ радиус уменьшается с увеличением массы, для $n = 1$ и $P = A\rho^2$ радиус не зависит от массы, только для $n < 1$ радиус растет.

Подставляем выражение $\rho_c$ в формулу для E:

$$E = \delta \cdot M^{\frac{5-n}{3-n}}.$$

Из предыдущей теоремы вириала мы знаем, что

$$W = -\frac{n}{3-n}\,\mathrm{E}, \quad U = \frac{3}{3-n}\,\mathrm{E};$$

при этом очевидно, что $E < 0$ и $\delta < 0$.

Теперь рассмотрим два способа увеличения массы звезды: 1) от равновесной конфигурации с массой $M$ перейдем также к равновесной конфигурации с массой $M + dM$. Очевидно, что

$$\mathrm{E}\,(M + dM) - \mathrm{E}\,(M) = d\mathrm{E} = \frac{d\mathrm{E}}{dM}\,dM = \frac{5-n}{3-n}\,\frac{\mathrm{E}}{M}\,dM;$$

2) к равновесной конфигурации с массой $M$ прибавим массу $dM$, поместив ее на поверхности звезды, где давление равно нулю. Внутренняя энергия прибавленной массы равна нулю (так как $P = 0$), а гравитационная энергия, очевидно, будет $-\frac{GM}{R}\,dM$. Следовательно,

$$d\mathrm{E} = -\frac{GM}{R}\,dM.$$

Теперь в силу вариационного принципа утверждаем, что оба выражения $d\mathrm{E}$ совпадают: во втором способе мы получили распределение плотности, отличающееся от равновесного при массе $M + dM$, так как прибавка лежит на поверхности. Однако в силу того, что равновесное распределение экстремально, отклонение от равновесного распределения может вызвать изменение в Е лишь второго порядка малости, т. е. в данном случае, когда добавка массы $dM$ мала, пропорциональное $(dM)^2$.

Итак (используя также выражение для $U$), получим

$$\frac{5-n}{3-n}\,\frac{\mathrm{E}}{M} = -\frac{GM}{R}, \quad U = \frac{3}{3-n}\,\mathrm{E} = -\frac{3}{5-n}\,\frac{GM^2}{R}.$$

Заметим, что последнее соотношение остается справедливым и при $n = 3$, тогда как в предыдущем появляется неопределенность. Из приведенного выражения немедленно следует, что решение уравнения равновесия при $n = 5$ является вырожденным, $R \to \infty$.

Наконец, ясно, что в случае изэнтропического решения с произвольным уравнением состояния, а также и при замене ньютоновской теории на ОТО остается в силе связь между производной энергии по числу частиц $N$ и гравитационным потенциалом на поверхности звезды (см. § 8 гл. 10). Однако в силу того, что Е ($M$) или Е ($N$) не имеет теперь простого аналитического выражения, такие простые изящные формулы из этой связи не получаются.

## § 3. Релятивистские уравнения равновесия звезды

а. *Равновесие в отсутствие вращения.* Прежде чем идти дальше, мы должны сформулировать уравнения равновесия звезды в ОТО. Рассмотрим сферически-симметричное распределение масс в состоянии механического равновесия. Это значит, что рассматривается звезда, у которой можно пренебречь вращением и упорядоченным магнитным полем. Звезда рассматривается в полном гидродинамическом равновесии; если звезда находится в состоянии медленной эволюции, то необходимо, чтобы при