Поэтому, например, если звезда состоит из Mg^{24} и дальнейшие ядерные реакции не идут за приемлемое время), то $M_{max} \approx 1{,}3\, M_{\odot}$.

До сих пор мы не учитывали вращение звезды. Твердотельное вращение несущественно меняет критическую массу и плотность

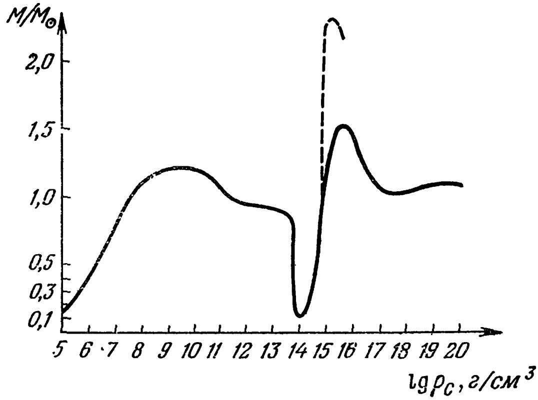

Рис. 39. Зависимость массы холодной звезды от плотности в центре. Сплошная линия — данные Саакяна и Вартаняна (1964), пунктир — данные Камерона (1970) для нейтронных звезд.

белого карлика [см. Крат (1950)]. Однако дифференциальное вращение может внести существенные изменения (см. Острикер и др., 1968).

На ниспадающей ветви $M = M(\rho_c)$ равновесные решения, соответствующие максимумам энергетических кривых, неустойчивы.

ПРИЛОЖЕНИЕ I К § 4

Выведем значение энергии звезды, давление в которой определяется релятивистски вырожденным электронным газом при $\rho \to \infty$.

Выпишем формулу (6.2.11) средней энергии электрона

$$E_e = \overline{E} - E_0 = m_e c^2 \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\right], \quad \rho_0 = \mu_e \cdot 10^6.$$

Переходя к энергии на грамм вещества, получаем выражение

$$E_1 = \frac{E_e}{m_p \mu_e} = \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\right].$$

После подстановки этого выражения в уравнение равновесия, переходя к пределу при $\rho \to \infty$, $\gamma = 4/3$, получаем, что последнее слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю, первое сокращается со слагаемым гравитационной энергии звезды, и остаток дает для энергии звезды на единицу массы

$$E_2 = -\frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e}\ \textit{эрг/г}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II К § 4

Поправки на ОТО. Дадим вначале выражения поправки в энергии данной произвольной конфигурации вещества, не соответствующей, вообще говоря, равновесию. Вещество считаем в данный момент покоящимся, т. е. мгновенная скорость равна нулю, однако мгновенное ускорение, вообще говоря, не равно нулю, поскольку нет равновесия.

Следует учитывать зависимость плотности массы от энергии. Плотность массы покоя обозначим ρ_0, плотность, включающую энергию, ρ, $\rho = \rho_0\left(1 + \frac{E_1}{c^2}\right)$, где E_1 — удельная энергия (сверх массы покоя) на единицу массы покоя.

Следует учитывать неевклидовость пространства (см. § 3 гл. 3):

$$dV = e^{\lambda/2} 4\pi r^2 dr, \quad V = 4\pi \int_0^r e^{\lambda/2} r^2 dr > \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где под r понимается такой «координатный» радиус, что длина большого круга есть $2\pi r$, поверхность сферы $4\pi r^2$. Инвариантной характеристикой конфигурации, занятой данным общим числом барионов, является функция $\rho_0(V)$, где V — текущий объем. Равновесие соответствует экстремуму наблюдаемой массы звезды

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr$$

при данной массе покоя (т. е. при данном числе барионов)

$$M_0 = \int_0^R \rho_0(V)\, dV$$

и при данной энтропии, которой определяется зависимость

$$E_1 = E_1(S, \rho_0).$$

Отсчитывая энергию от массы покоя звезды, получаем

$$\mathrm{E} = c^2 (M - M_0) = c^2 \int_0^R (\rho e^{-\lambda/2} - \rho_0)\, dV.$$

Это выражение необходимо сравнить с ньютоновским

$$\mathrm{E}_{\text{Н}} = \int E_1 \rho_0 dV - G \int \frac{m' dm'}{r'},$$

где m' — текущая «ньютоновская» масса (вычисленная без поправок на зависимость массы от энергии), r' — «ньютоновский» или евклидов радиус

$$dm' = \rho_0 dV; \quad m' = \int_0^V \rho_0 dV; \quad r' = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V}.$$

Рассматриваем такую постановку задачи: пусть функция $\rho_0(V)$ одинакова в ньютоновской теории и в теории относительности. Поправкой на ОТО называем разность $\Delta E = \mathrm{E} - \mathrm{E}_{\mathrm{H}}$ и вычисляем первый неисчезающий член в разложении по степеням G. Очевидно, что безразмерным параметром является

$$\frac{r_g}{R} \sim \frac{GM}{Rc^2} \sim GM^{2/3}\rho_c^{1/3}c^{-2}.$$

Отношение $\dfrac{E_1}{c^2} \sim \dfrac{P}{\rho c^2}$ того же порядка, что и r_g/R; члены первого порядка по G уже учтены в ньютоновском приближении.

Используем единственное соотношение, не требующее равновесия:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2}, \quad e^{-\lambda/2} = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{Gm}{rc^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{Gm}{rc^2}\right)^2.$$

с нужной точностью получим *)

$$\Delta \mathrm{E} = \int dV \left[- E_1\rho_0 \frac{Gm}{c^2 r} - \frac{1}{2}\rho_0 \frac{G^2m^2}{c^2r^2} + \rho_0 G\left(\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r}\right)\right], \tag{10.4.1п}$$

$$\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m'-m}{r'} - \frac{m(r'-r)}{rr'}, \tag{10.4.2п}$$

$$m' - m = -\frac{1}{c^2}\int E_1\rho_0 dV + \frac{G}{c^2}\int \frac{\rho_0 m}{r} dV, \tag{10.4.3п}$$

$$r' - r = \frac{G}{r^2c^2}\int mr\,dr. \tag{10.4.4п}$$

Используя эти соотношения, окончательно получим поправку в виде суммы пяти интегралов, в которых можно везде отождествлять плотность, объем, радиус с соответствующими ньютоново-евклидовыми величинами, а ошибка от этого будет высшего порядка малости:

$$\Delta \mathrm{E} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

$$I_1 = -\frac{G}{c^2}\int E_1 \frac{m\,dm}{r}, \quad I_2 = -\frac{1}{2}\frac{G^2}{c^2}\int \frac{m^2 dm}{r^2},$$

$$I_3 = -\frac{G}{c^2}\int \left(\int E_1 dm\right)\frac{1}{r}\,dm, \quad I_4 = +\frac{G^2}{c^2}\int\left(\int \frac{m\,dm}{r}\right)\frac{dm}{r},$$

$$I_5 = -\frac{G^2}{c^2}\int\left(\int mr\,dr\right)\frac{m\,dm}{r^4}.$$

Интегралы берутся по всей массе звезды, а внутренние интегралы в I_3, I_4 и I_5 от центра до текущего m или r. Они расположены в том порядке, который естественно следует из формул (10.4.1п) — (10.4.4п). Это выражение для $\Delta \mathrm{E}$ существенно упрощается, применительно к равновесному распределению газа с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$, т. е. при учете

$$E_1 = \frac{3P}{\rho}, \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}.$$

В этом случае, после нескольких интегрирований по частям, получим $I_3 + I_4 = -{}^2/_3 I_1 + 2I_2$, $I_5 = {}^1/_3 I_1$ и окончательно $\Delta \mathrm{E} = {}^2/_3 I_1 + 3I_2$. Это выражение в точности совпадает со взятой с обратным знаком поправкой Фаулера (1964), полученной им в теории сверхмассивных звезд (заметим, что Фаулер

*) В (10.4.2п) — (10.4.4п) сравниваем r' и r, m' и m при равном V.

рассматривал равновесную конфигурацию):

$$\Delta \mathrm{E} = -\Delta E_e.$$

Используя теперь функцию Эмдена с $n = 3$ для вычисления интегралов, получаем окончательно

$$\Delta E_{\text{ОТО}} = -0{,}93\frac{G^2 M^{7/3}\rho_e^{2/3}}{c^2}.$$

§ 5. Нейтронные звезды

Проследим за дальнейшим изменением M с повышением ρ_c.

В главе 6 показано, что с повышением плотности в веществе появляются свободные нейтроны. При $\rho > 10^{12}$ *г/см³* давление (так же как и плотность) в основном определяется вырожденным нейтронным газом. Если бы нейтроны не взаимодействовали между собой, то этот газ был бы идеальным и, пока газ еще нерелятивистский, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$ (и всегда $\gamma > 4/3$). Однако известно, что между нейтронами существуют ядерные силы притяжения, и хотя эти силы недостаточны для образования ядер, состоящих из нейтронов, все же они вносят отрицательный вклад в энергию и γ по-прежнему меньше 4/3. Равновесные состояния неустойчивы, и кривая $M = M(\rho)$ продолжает идти вниз (см. рис. 39).

На малых расстояниях между барионами силы притяжения должны смениться силами отталкивания, которые вносят положительный вклад в давление и поэтому при $\rho \sim 2\cdot 10^{14}$ *г/см³* эффективная для всей звезды γ вновь становится более 4/3.

Таким образом, минимального значения масса M достигает при $\rho_c \approx 2\cdot 10^{14}$ *г/см³*. Можно оценить это $M_{\min}$, найдя давление при $\rho_c = 2\cdot 10^{14}$ *г/см³* по формуле (6.6.1) и подставив это значение в (10.4.1) с $b \approx 3$:

$$M_{\min} \approx 0{,}05\ M_{\odot}.$$

Напоминаем, что это только порядковая оценка, ибо в действительности звезда не может целиком состоять из нейтронов. В центральных областях звезда имеет состав, описанный в гл. 6. При $M > 0{,}3\ M_{\odot}$, согласно Камерону (1970), в центральных областях в составе вещества имеются уже и гипероны. В областях, лежащих ближе к поверхности звезды, давление недостаточно для существования стабильных нейтронов и внешняя оболочка состоит из ядер и электронов. За деталями расчетов отсылаем к одной из первых работ Саакяна и Вартаняна (1964), более современные данные можно найти в обзоре Камерона (1970). Самая внешняя корка, возможно, даже кристаллическая (см. Камерон, 1970).

Сделаем замечание о равновесных решениях с положительной энергией звезды. На рис. 37 они соответствуют максимумам в области $E > 0$. Их появление связано с тем, что учет нейтрониза-