лисовых сил не обнаружит. Действительно, внутри сферы прецессия гирокомпасов (система гироскопов, указывающих неизменное направление в инерциальной системе отсчета) во всех точках одинакова и поэтому обнаружить ее невозможно. Только сравнив свою инерциальную систему с инерциальной системой вне сферы на бесконечности, наблюдатель обнаружит, что его система медленно прецессирует.

Аналогичный эффект вызывает вращение тела и во внешнем поле. Приведем сразу окончательную формулу:

$$|\Omega| = \frac{G|K|}{c^2r^3}(3\cos^2\theta + 1)^{1/2}, \tag{1.10.13}$$

где K — полный момент тела.

Наличие кориолисовых сил означает, что инерциальный компас (система гироскопов), который вдали от движущихся масс указывает на одни и те же далекие звезды, будет вблизи вращающегося тела поворачиваться с указанной угловой скоростью, меняя ориентацию относительно далеких звезд.

Скорость прецессии гирокомпаса у полюса вращающегося тела ($\theta = 0$) в два раза больше, чем у экватора ($\theta = \pi/2$). При этом у полюса прецессия происходит в ту же сторону, что и вращение тела, а у экватора — в противоположную сторону.

Для однородного шара, вращающегося с частотой ω, формула (1.10.13) может быть переписана в следующем виде:

$$|\Omega| = \frac{2GM}{5c^2R}(3\cos^2\theta + 1)^{1/2}|\omega|\left(\frac{R}{r}\right)^3. \tag{1.10.14}$$

Вблизи обычных звезд и планет прецессия ничтожно мала (хотя в принципе измерима!). Так, у полюса Солнца $\Omega_{\odot} \approx 5\cdot10^{-12}$ *сек*$^{-1}$ $\approx$ ≈ 30 *угл·сек/год*. У поверхности Земли $\Omega_{♁} \approx -0{,}1$ *угл·сек/год* на экваторе и 0,2 *угл·сек*/год на полюсе (за положительное выбрано направление вращения тела). Заметим, что у нейтронных звезд — пульсаров (см. гл. 14) Ω может быть порядка 20 *сек*$^{-1}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 10

Вычислим смешанные компоненты метрического тензора внутри полой однородной вращающейся сферы. Эти компоненты вычисляются по формуле (1.10.9):

$$h_{0\alpha} \doteq \frac{\varkappa}{2\pi}\int\frac{\rho v^\alpha}{cr}\,dV. \tag{1.10.1п}$$

Здесь v^α — компоненты скорости сферы в декартовой системе координат, r — расстояние от элемента dV до данной точки. Перейдем под знаком интегрирования к сферическим координатам. Компоненты скорости:

$$v_x = v^1 = -\omega y = -R\omega\sin\varphi\sin\theta,$$
$$v_y = v^2 = \omega x = R\omega\cos\varphi\sin\theta,$$
$$v_z = v^3 = 0.$$

Здесь ω — угловая скорость вращения, R — радиус сферы. Очевидно, что компонента h_{03} равна нулю. Величину r в (1.10.1п) выразим через угловые координаты: $r = R\sqrt{1+\eta^2-2\eta\cos\alpha}$, где $\eta = \bar{r}/R$, $\bar{r}$ — радиальная координата точки, где вычисляются $h_{0\alpha}$, α — угол между направлением из центра на эту точку интегрирования и на элемент на сфере dV. Заменяя $\rho\, dV$ на $\frac{M}{4\pi}\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$, где M — масса сферы, имеем для h_{01} и h_{02}

$$\begin{Bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \end{Bmatrix} = \frac{\varkappa M\omega}{8\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\theta \begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix}}{\sqrt{1+\eta^2-2\eta\cos\alpha}}\, d\varphi\, d\theta. \tag{1.10.2п}$$

Преобразуем знаменатель подынтегрального выражения. Прежде всего,

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0),$$

где θ_0, φ_0 и θ, φ — угловые координаты рассматриваемой точки и элемента интегрирования соответственно. Теперь можно записать:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2-2\eta\cos\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\eta^n P_n(\cos\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\eta^n\Big\{P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta_0) + $$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta_0)\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\Big\}, \tag{1.10.3п}$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Первое слагаемое в фигурных скобках в (1.10.3п) после умножения на $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$ и интегрирования по φ в пределах $0 \div 2\pi$ в выражении (1.10.2п) дают нуль. Далее, используя соотношения

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\sin[(m+1)\varphi - m\varphi_0] +$$
$$+ \sin[\varphi(1-m)+m\varphi_0]\}\,d\varphi = \pi\sin\varphi_0\delta_m^1,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\cos[(m+1)\varphi - m\varphi_0] +$$
$$+ \cos[(1-m)\varphi + m\varphi_0]\}\,d\varphi = \pi\cos\varphi_0\delta_m^1,$$

где δ_m^1 — символ Кронекера, получаем окончательно:

$$\begin{Bmatrix} h_{01} \\ h_{02} \end{Bmatrix} = -\frac{\varkappa M\omega}{8\pi c}\,2\int_{-1}^{1}P_1^1(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\eta^n P_n^1(x)\,P_n^1 \times$$
$$\times(\cos\theta_0)\begin{Bmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \end{Bmatrix}dx = -\frac{\varkappa M\omega}{6\pi c}\eta P_1^1(\cos\theta_0)\begin{Bmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{4GM\omega}{3c^3R}\,\tilde{r}\sin\theta_0\begin{Bmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \end{Bmatrix}.$$

Последнее выражение и приведено в тексте (с небольшим изменением обозначений).