РАЗДЕЛ I

РАСШИРЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

⊙ ⊙ ⊙

ГЛАВА I

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Локальный закон распределения скорости

Будем рассматривать однородную и изотропную космологическую модель. Однородной изотропной космологической моделью называется идеализированная картина Вселенной, в которой: а) одинаковы все наблюдаемые величины в различных точках пространства в один и тот же (но любой) момент времени (свойство однородности) и б) в любой точке пространства, в любой момент времени равноценны все направления (свойство изотропии). Ниже мы покажем, что если в некоторый момент распределение и движение материи однородно и изотропно, то это свойство сохранится и в течение всей эволюции. Кроме того, из свойства однородности следует, что достаточно проследить судьбу одного элемента объема вещества, ибо судьба всех остальных в точности такая же. Очень важным оказывается для анализа эволюции то обстоятельство, что в данной модели можно воспользоваться ньютоновской теорией тяготения. Почему это оказывается возможным? Дело в том, что рассматриваемая однородная изотропная модель является частным случаем сферически-симметричной модели, причем за центр можно выбрать любую точку. Хорошо известно, что в классической ньютоновской теории тяготения сферически-симметричное распределение вещества не создает гравитационного поля внутри сферической полости. В действительности это утверждение справедливо также и в общей теории относительности (ОТО), если Вселенная однородна и расширяется изотропно. Оба утверждения подробно рассмотрены в нашей книге «Теория тяготения и эволюция звезд» (ТТ и ЭЗ). Таким образом, если мы выделим достаточно малый шар радиуса R_0, то поле тяготения, создаваемое его массой, будет слабым (внешние массы несущественны, ибо они не создают поля внутри полости), скорости относительных движений в этом шаре также малы, и можно пользоваться ньютоновской теорией. В однородной и изотропной модели, которая отлично описывает нашу Вселенную, ОТО используется для строгого доказательства того, что она не является необходимой для решения локальных проблем в космологии.

Мы воспользуемся этим фактом и будем использовать привычную ньютоновскую теорию для вывода формул эволюции модели [Милн (1934, 1935), Мак-Кри, Милн (1934), Зельдович (1963), Каллан, Дикке и Пиблс (1965)]. Разумеется, когда мы от локальных свойств перейдем к изучению геометрии больших областей, необходимо будет вернуться к ОТО.

Итак, мы пользуемся в малой области ньютоновской теорией, локально являющейся точной. Разумеется, те же формулы можно было бы получить прямо из уравнений ОТО. Мы это сделаем в § 1 следующей главы. Однако смысл формул при таком способе вывода был бы не столь очевиден.

Движение вещества будем рассматривать в системе координат, выбранной так, что в начале координат (0) вещество покоится. В этой системе координат вещество, находящееся на некотором расстоянии от начала координат, движется. Пусть скорость движения положительна, т. е. направлена от начала координат, и пропорциональна расстоянию. В векторной форме такой закон распределения скорости записывается в виде

$$\boldsymbol{u}=H\boldsymbol{r}, \tag{1.1.1}$$

причем постоянная $H>0$ называется, как уже говорилось во введении, постоянной Хаббла. Название «постоянная» указывает на независимость H от величины и направления вектора $\boldsymbol{r}$. Однако H зависит от времени, эта зависимость будет подробно рассмотрена в § 2. Очевидно, что указанное распределение скоростей изотропно: для наблюдателя, находящегося в начале координат, никакое направление не является выделенным. В произвольной точке A, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r}_A$, вещество движется со скоростью $\boldsymbol{u}_A$ и, казалось бы, изотропия нарушается.

Перейдем в систему координат с началом в точке A, движущейся со скоростью $\boldsymbol{u}_A$, т. е. произведем перенос начала координат и галилеев переход к движущейся системе. Величины, измеренные в новой системе, отметим штрихом. Очевидно, $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A$. Тогда

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_A=H\boldsymbol{r}-H\boldsymbol{r}_A=H(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A)=H\boldsymbol{r}'. \tag{1.1.2}$$

Следовательно, в новой системе имеет место тот же закон распределения скоростей $\boldsymbol{u}'$ в зависимости от $\boldsymbol{r}'$, что и в старой для зависимости $\boldsymbol{u}$ от $\boldsymbol{r}$. Распределение скоростей (1.1.1) замечательно именно тем, что оно не выделяет никакой особой точки. Только такое распределение скоростей изотропно и однородно. Наблюдатель, движущийся вместе с веществом, в любой точке видит картину удаления от него всех окружающих его частиц.

Закон расширения (1.1.1) приводит к следующей картине локального расширения: расстояние между любой парой материальных точек A и B изменяется со временем по закону $\frac{dr_{AB}}{dt}=Hr_{AB}$, откуда

$$r_{AB}(t)=r_{AB}(t_0)\exp\int\limits_{t_0}^{t}H(t)\,dt. \qquad (1.1.3)$$

Рассмотрим закон изменения плотности. Возьмем шар, содержащий определенную массу M; радиус его обозначим $R=R(t)$. Плотность вещества $\rho=M\Big/\frac{4\pi}{3}R^3$, откуда

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{3M}{\frac{4\pi}{3}R^4}\frac{dR}{dt}.$$

Подставим в последнюю формулу $\frac{dR}{dt}=u=HR$; получим

$$\frac{d\rho}{dt}=-3\rho H. \qquad (1.1.4)$$

То же уравнение более формально можно получить из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}).$$

Предположим, что ρ не зависит от координат, т. е. $\rho=\rho(t)$; тогда

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u}=\operatorname{div}(H\boldsymbol{r})=3H,$$

отсюда снова

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-3H\rho. \qquad (1.1.4a)$$

Итак, $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ не зависит от координат. Следовательно, если в какой-то момент ρ не зависело от координат, то при законе расширения (1.1.1) во все последующие моменты ρ также не зависит от координат *), хотя и меняется с течением времени, $\rho=\rho(t)$.

Таким образом, однородность, заданная в начальный момент, сохраняется всегда.

Тот же результат следует и для свойств распределения скорости. В системе покоя центра шара $\boldsymbol{u}=H\boldsymbol{r}$. Найдем закон изменения скорости. Ускорение в данной точке $\boldsymbol{r}$ внутри шара зависит от тяготения той массы, которая находится внутри соответствующей сферы радиу-

---

*) В частности, по этой причине $\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

сом $r=|\boldsymbol{r}|$. Обозначим эту массу m, где $m=\frac{4\pi}{3}\rho r^3$. Ускорение g по величине равно $\frac{Gm}{r^2}=\frac{4\pi}{3}G\rho r$ и направлено к центру, так что в векторной форме

$$\boldsymbol{g}=-\frac{4\pi}{3}G\rho\boldsymbol{r}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\boldsymbol{g}$, и поскольку $\boldsymbol{u}(t)\sim\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{g}\sim\boldsymbol{r}$, то и в любой последующий и предыдущий момент времени $\boldsymbol{u}\sim\boldsymbol{r}$, скорость изотропна, т. е. всегда $u=Hr$, хотя величина H и зависит от времени.

В заключение подчеркнем, что все сказанное применимо для описания вещества и при наличии давления. Действительно, в силу однородности нет градиента давления, нет никакой силы, связанной с давлением и влияющей на движение. Все приведенные выше рассуждения остаются в силе. Правда, необходимо тут же оговориться, что существует релятивистский эффект, связанный с тем, что давление создает добавочную силу тяготения. Этот эффект существен лишь в случае, когда уравнение состояния вещества релятивистское и давление порядка плотности энергии: $P\sim\varepsilon$. Мы остановимся на этом эффекте далее, в § 5. В последующих параграфах (§§ 2—4) мы предполагаем, что давление много меньше плотности энергии: $P\ll\rho c^2$. Этому условию, например, заведомо удовлетворяет совокупность галактик.

§ 2. Закон эволюции. Критическая плотность

Рассмотрим шар радиуса R, содержащий массу M, и найдем ускорение частицы, находящейся на поверхности шара. На частицу действует сила притяжения со стороны M:

$$\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{GM}{R^2}. \tag{1.2.1}$$

Подставив сюда $u=\frac{dR}{dt}=HR$ и $M=\frac{4\pi}{3}\rho R^3$, получим

$$\frac{dHR}{dt}=R\frac{dH}{dt}+H\frac{dR}{dt}=R\frac{dH}{dt}+RH^2=-\frac{4\pi}{3}G\rho R,$$

т. е.

$$\frac{dH}{dt}=-H^2-\frac{4\pi}{3}G\rho. \tag{1.2.2}$$

Уравнения (1.1.4) и (1.2.2) образуют систему, полностью определяющую изменение со временем (и для прошлого, и для будущего) всех локальных свойств Вселенной. Как и следовало ожидать, в эти