сом $r=|\boldsymbol{r}|$. Обозначим эту массу m, где $m=\frac{4\pi}{3}\rho r^3$. Ускорение g по величине равно $\frac{Gm}{r^2}=\frac{4\pi}{3}G\rho r$ и направлено к центру, так что в векторной форме

$$\boldsymbol{g}=-\frac{4\pi}{3}G\rho\boldsymbol{r}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\boldsymbol{u}(t)+\Delta t\boldsymbol{g}$, и поскольку $\boldsymbol{u}(t)\sim\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{g}\sim\boldsymbol{r}$, то и в любой последующий и предыдущий момент времени $\boldsymbol{u}\sim\boldsymbol{r}$, скорость изотропна, т. е. всегда $u=Hr$, хотя величина H и зависит от времени.

В заключение подчеркнем, что все сказанное применимо для описания вещества и при наличии давления. Действительно, в силу однородности нет градиента давления, нет никакой силы, связанной с давлением и влияющей на движение. Все приведенные выше рассуждения остаются в силе. Правда, необходимо тут же оговориться, что существует релятивистский эффект, связанный с тем, что давление создает добавочную силу тяготения. Этот эффект существен лишь в случае, когда уравнение состояния вещества релятивистское и давление порядка плотности энергии: $P\sim\varepsilon$. Мы остановимся на этом эффекте далее, в § 5. В последующих параграфах (§§ 2—4) мы предполагаем, что давление много меньше плотности энергии: $P\ll\rho c^2$. Этому условию, например, заведомо удовлетворяет совокупность галактик.

§ 2. Закон эволюции. Критическая плотность

Рассмотрим шар радиуса R, содержащий массу M, и найдем ускорение частицы, находящейся на поверхности шара. На частицу действует сила притяжения со стороны M:

$$\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{GM}{R^2}. \tag{1.2.1}$$

Подставив сюда $u=\frac{dR}{dt}=HR$ и $M=\frac{4\pi}{3}\rho R^3$, получим

$$\frac{dHR}{dt}=R\frac{dH}{dt}+H\frac{dR}{dt}=R\frac{dH}{dt}+RH^2=-\frac{4\pi}{3}G\rho R,$$

т. е.

$$\frac{dH}{dt}=-H^2-\frac{4\pi}{3}G\rho. \tag{1.2.2}$$

Уравнения (1.1.4) и (1.2.2) образуют систему, полностью определяющую изменение со временем (и для прошлого, и для будущего) всех локальных свойств Вселенной. Как и следовало ожидать, в эти уравнения не входит радиус R произвольно выделенной массы M и не входит также сама величина M.

Для того чтобы представить наглядно общий характер расширения вещества, удобно, тем не менее, пользоваться величинами R и M.

Уравнение движения (1.2.1) можно один раз проинтегрировать. Умножая его на $\frac{dR}{dt}$, получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-\frac{GM}{R}=A. \qquad (1.2.3)$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии: первый член слева — кинетическая энергия единицы массы, второй член слева (отрицательный) — ее потенциальная энергия, константа A есть полная энергия единицы массы на поверхности шара.

Будем считать известными значения H_0 и ρ_0 в момент t_0 и зададимся некоторым R_0; при этом $M=\frac{4\pi}{3}R_0^3\rho_0$. Мы знаем также значение $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}=H_0R_0$ в момент t_0. Таким образом, можно определить значение константы в правой части (1.2.3). Получим

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2_{t=t_0}-G\frac{4\pi}{3}\frac{\rho_0R_0^3}{R_0}=\frac{1}{2}H_0^2R_0^2-G\frac{4\pi\rho_0R_0^2}{3}.$$

Итак, из (1.2.3) следует:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0R_0^3}{R}-\frac{8\pi}{3}GR_0^2\left(\rho_0-\frac{3H_0^2}{8\pi G}\right). \qquad (1.2.4)$$

Это уравнение можно проинтегрировать. Решение мы приведем в § 1 гл. 2 (табл. I), но весьма поучительно дать качественный его анализ.

Легко представить себе общий характер решения (1.2.4). В настоящее время $\frac{dR}{dt}$ положительно. Следовательно, в прошлом R было меньше, а значит, $\frac{8\pi G\rho_0R_0^3}{3R}$ было больше, чем в настоящее время. Следовательно, в прошлом $\frac{dR}{dt}$ обязательно было больше, чем в настоящее время, и был момент, когда

$$R=0, \qquad \frac{dR}{dt}=+\infty.$$

Предсказание для будущего зависит от знака скобки $\left(\rho_0-\frac{3H_0^2}{8\pi G}\right)$ во втором члене.

Обозначим

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G}=\rho_c, \tag{1.2.5}$$

а отношение ρ_0/ρ_c — через Ω.

Заметим здесь же, что в космологии часто употребляется и другая величина: $q_0=\Omega/2$, носящая название параметра ускорения. Это название связано с тем, что, как легко убедиться из (1.2.1), (1.2.4) и (1.2.5),

$$q_0=-\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_{t=t_0}\Big/R_0H_0^2. \tag{1.2.6}$$

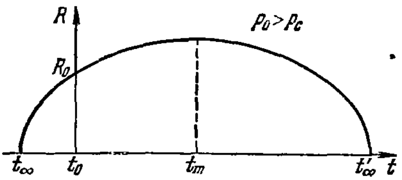

Рис. 1. Изменение со временем расстояния R между двумя точками, когда плотность ρ_0 больше, чем критическая плотность ρ_c: t_0— сегодняшний момент t_∞ и t'_∞ — моменты бесконечной плотности, t_m момент максимального расширения.

Если $\rho_0>\rho_c$, то скобка в (1.2.4) положительна. Значит, по мере увеличения R будет достигнуто такое значение, когда вся правая часть (1.2.4) обратится в нуль. В этот момент расширение прекратится и сменится сжатием (рис. 1).

Если $\rho_0<\rho_c$, то расширение будет продолжаться неограниченно. В пределе при $t\to\infty$, $R\to\infty$ имеем из (1.2.4)

$$\frac{dR}{dt}=\sqrt{\frac{8\pi}{3}GR_0^2(\rho_c-\rho_0)}=\text{const}.$$

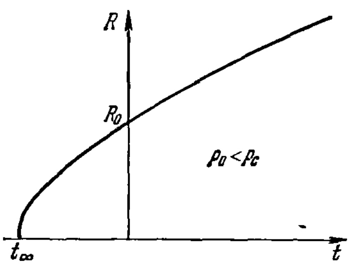

Рис. 2. Изменение со временем расстояния между двумя точками, когда плотность ρ_0 меньше, чем критическая плотность ρ_c.

Соответствующая кривая показана на рис. 2. Как уже отмечалось, расстояние между любой парой объектов меняется пропорционально R, т. е. проходит через максимум в случае рис. 1 и неограниченно увеличивается в случае рис. 2. В первом случае ($\rho_0>\rho_c$, рис. 1) постоянная Хаббла уменьшается от H_0 при $t=t_0$ до $H=0$ при $t=t_m$ и $H=-\infty$ при $t=t_\infty$. Во втором случае ($\rho_0<\rho_c$, рис. 2) H уменьшается, оставаясь всегда положительной величиной, при $t\to\infty$, $\frac{dR}{dt}=b$, $R=bt$, $H=\frac{1}{t}$ (асимптотически точно, без какого-либо численного коэффициента).

Какой случай в действительности имеет место: $\rho_0>\rho_c$ или $\rho_0<\rho_c$?

Для ответа надо, очевидно, знать значения ρ_0 и H_0 для настоящего момента.

Подробно мы рассмотрим современное состояние вопроса об определении ρ_0 и H_0 из наблюдений в § 9 гл. 3. Здесь же только коротко укажем, что наиболее вероятное значение постоянной Хаббла H_0 лежит в интервале 75—50 *км/сек·Мпс*. Соответствующее значение критической плотности $\rho_c = 10^{-29}$—$5\cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}. Достаточно надежно установлено, что средняя плотность материи во Вселенной ρ_0 не меньше чем $\rho_0 = 3\cdot 10^{-31}$ *г/см*^{3}. Эта величина ρ_0 определяется массой материи, входящей в галактики, и не учитывает массы межгалактического вещества. Если между галактиками нет значительной плотности материи, то $\rho_0 < \rho_c$ и в действительности осуществляется случай рис. 2.

Не исключено, однако, что на самом деле плотность вещества больше — в частности, за счет межгалактического ионизованного водорода или других труднонаблюдаемых видов материи (подробнее см. гл. 7, 8, 16).

В заключение параграфа сделаем следующую важную оговорку. Мы рассматривали эволюцию элемента объема вещества Вселенной под действием сил тяготения. При этом предполагалось, что космологическая постоянная Λ в уравнении тяготения равна нулю. О космологической постоянной, ее смысле и возможности ее отличия от нуля говорится в §§ 1, 2 гл. 4. Отличие Λ от нуля может повлиять на поздние стадии расширения мира. Однако в настоящее время нет ни теоретических, ни сколько-нибудь убедительных наблюдательных данных в пользу отличия Λ от нуля. Поэтому мы будем считать $\Lambda \equiv 0$ на протяжении всей книги, исключая §§ 1, 2 гл. 4, где подробно разбираются те следствия, которые получаются при Λ, отличной от нуля.

§ 3. Продолжительность расширения

Найдем момент t_∞ в прошлом, когда $R=0$, т. е. когда плотность вещества была бесконечной. Если бы скорость расширения была постоянной и равной современному значению, то можно было бы написать:

$$R_0 = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}(t_0 - t_\infty) = H_0 R_0 (t_0 - t_\infty). \tag{1.3.1}$$

Для «возраста» T однородной модели Вселенной, т. е. для времени, протекшего от t_∞ до настоящего момента t_0, мы получили бы (при $H_0 = 75$ *км/сек·Мпс*)

$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} = 4\cdot 10^{17}\ \textit{сек} \cong 10^{10}\ \textit{лет}.$$

Как видно из уравнения (1.2.3) и рис. 1 и 2, в прошлом $\frac{dR}{dt}$ было больше, чем в настоящее время. В действительности, как нетрудно