Подробно мы рассмотрим современное состояние вопроса об определении ρ_0 и H_0 из наблюдений в § 9 гл. 3. Здесь же только коротко укажем, что наиболее вероятное значение постоянной Хаббла H_0 лежит в интервале 75—50 *км/сек·Мпс*. Соответствующее значение критической плотности $\rho_c=10^{-29}$—$5\cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}. Достаточно надежно установлено, что средняя плотность материи во Вселенной ρ_0 не меньше чем $\rho_0=3\cdot 10^{-31}$ *г/см*^{3}. Эта величина ρ_0 определяется массой материи, входящей в галактики, и не учитывает массы межгалактического вещества. Если между галактиками нет значительной плотности материи, то $\rho_0<\rho_c$ и в действительности осуществляется случай рис. 2.

Не исключено, однако, что на самом деле плотность вещества больше — в частности, за счет межгалактического ионизованного водорода или других труднонаблюдаемых видов материи (подробнее см. гл. 7, 8, 16).

В заключение параграфа сделаем следующую важную оговорку. Мы рассматривали эволюцию элемента объема вещества Вселенной под действием сил тяготения. При этом предполагалось, что космологическая постоянная Λ в уравнении тяготения равна нулю. О космологической постоянной, ее смысле и возможности ее отличия от нуля говорится в §§ 1, 2 гл. 4. Отличие Λ от нуля может повлиять на поздние стадии расширения мира. Однако в настоящее время нет ни теоретических, ни сколько-нибудь убедительных наблюдательных данных в пользу отличия Λ от нуля. Поэтому мы будем считать $\Lambda\equiv 0$ на протяжении всей книги, исключая §§ 1, 2 гл. 4, где подробно разбираются те следствия, которые получаются при Λ, отличной от нуля.

§ 3. Продолжительность расширения

Найдем момент t_∞ в прошлом, когда $R=0$, т. е. когда плотность вещества была бесконечной. Если бы скорость расширения была постоянной и равной современному значению, то можно было бы написать:

$$R_0=\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}(t_0-t_\infty)=H_0R_0(t_0-t_\infty). \qquad (1.3.1)$$

Для «возраста» T однородной модели Вселенной, т. е. для времени, протекшего от t_∞ до настоящего момента t_0, мы получили бы (при $H_0=75$ *км/сек·Мпс*)

$$T=t_0-t_\infty=\frac{1}{H_0}=4\cdot 10^{17}\ сек\cong 10^{10}\ лет.$$

Как видно из уравнения (1.2.3) и рис. 1 и 2, в прошлом $\frac{dR}{dt}$ было больше, чем в настоящее время. В действительности, как нетрудно получить из формул предыдущего параграфа (см. (1.2.4)),

$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right) = \frac{1}{H_0} f(\Omega), \tag{1.3.2}$$

где мы обозначили $\Omega = \rho_0/\rho_c$. Аналитический вид функции $f(\Omega)$ приведен в приложении к данному параграфу. График $f(\Omega)$ дан на рис. 3 *).

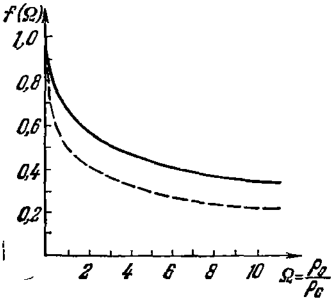

Рис. 3. Безразмерный возраст мира (отнесенный к обратной константе Хаббла $1/H$) как функция безразмерной плотности, отнесенной к критической плотности. Сплошная линия — мир, заполненный материей с уравнением состояния $P=0$; пунктирная — мир, заполненный веществом с $P=\varepsilon/3$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 3

Сокращение времени эволюции по сравнению с равномерным расширением вещества зависит от плотности. Характеризующая эту зависимость функция f находится решением уравнения (1.2.4). Функция f такова, что $f \leqslant 1$, причем при $\rho_0=0$, $\Omega=0$ $f(0)=1$. В общем случае, при произвольном Ω, функция f дается формулами, которые имеют различный вид при $\Omega > 1$ и при $\Omega < 1$. В первом случае

$$f = \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}} - \frac{1}{\Omega}\sqrt{\Omega-1}\right]. \tag{1.3.п1}$$

При этом легко проверить, что при $\Omega \to 1$ $f \to 2/3$; при $\Omega \gg 1$ $f \to \pi/2\sqrt{\Omega}$, так что $f \to 0$ при $\Omega \to \infty$. При малой плотности, т. е. при $\Omega < 1$,

$$f = \frac{\Omega}{(1-\Omega)^{3/2}}\left[-\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{1-\Omega}{\Omega}} + \frac{1}{\Omega}\sqrt{-\Omega+1}\right]. \tag{1.3.п2}$$

Эта формула, естественно, также дает в пределе $\Omega \to 1$ $f \to 2/3$, так что $f(1)$ не зависит от того, с какой стороны мы подходим к $\Omega=1$; f не терпит разрыва или излома, несмотря на различный аналитический вид (1.3.1п) и (1.3.2п). При $\Omega \ll 1$ (см. ниже (1.4.8))

$$f = 1 - \frac{\Omega}{2}\ln\frac{1}{\Omega}, \tag{1.3.п3}$$

т. е. $f \to 1$ при $\Omega \to 0$.

В случае $\Omega > 1$ представляет интерес время достижения максимума плотности $t_m - t_0$, а также время до полного сжатия $t'_\infty - t_0$ (см. рис. 1). Из решения уравнения (1.2.4) можно показать, что

$$t_m - t_0 = \frac{1}{H_0} f_m(\Omega), \qquad (t'_\infty - t_0) = \frac{1}{H_0} f'(\Omega), \tag{1.3.п4}$$

*) Пунктиром показана кривая для случая, когда главную часть вещества составляют кванты и нейтрино; см. § 7.

где

$$f_m(\Omega)=\frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{\Omega-1}}{\Omega}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}}\right], \tag{1.3.п5}$$

$$f'(\Omega)=f+2f_m=\frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}\left[\pi+\frac{\sqrt{\Omega-1}}{\Omega}-\arcsin\sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}}\right]. \tag{1.3.п6}$$

Функция f_m изображена на рис. 4. Плотность вещества проходит через максимум и затем обращается в бесконечность лишь в случае $\Omega>1$. Соответственно и формулы (1.3.5п) и (1.3.6п) определены лишь для $\Omega>1$: при Ω, приближающемся к единице, f_m и f' уходят в бесконечность пропорционально $1/(\Omega-1)^{3/2}$.

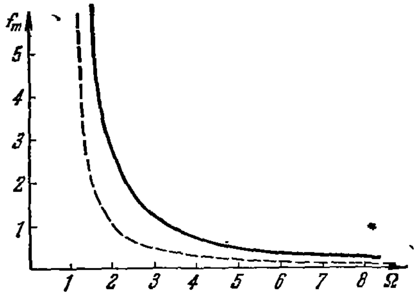

Рис. 4. Безразмерное время, необходимое для достижения максимума радиуса, как функция плотности. Сплошная линия — $P=0$, пунктирная — $P=\varepsilon/3$.

§ 4. Два частных решения. Начальная стадия

Частное решение уравнения (1.2.4) в случае $\rho_0=\rho_c$ ($\Omega=1$) имеет особенно простую форму. Уравнение (1.2.4) в этом случае приобретает вид (напомним, что мы обозначили $\rho_c=3H_0^2/8\pi G$)

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0R_0^3}{R}.$$

Решение этого уравнения с учетом (1.2.5) дает

$$R=R_0\left(\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}\right)^{2/3}, \tag{1.4.1}$$

$$t_0-t_\infty=\frac{2}{3}\frac{1}{H_0}, \tag{1.4.2}$$

и из (1.1.4) получаем

$$\rho=\frac{1}{6\pi G(t-t_\infty)^2}=\frac{8\cdot10^5}{(t-t_\infty)^2}, \tag{1.4.3}$$

где время дано в *сек*, плотность — в *г/см*³. В уравнении (1.2.4) при $\rho_0=\rho_c$ исчезает второй член. Но при любом $\rho_0\neq\rho_c$ в настоящее время надо иметь в виду, что в прошлом, вблизи t_∞, был период, для которого R было достаточно мало и, следовательно, можно было пренебречь константой — вторым членом в (1.2.4) — по сравнению с первым членом, пропорциональным $1/R$. Поэтому выражение плотности (1.4.3) является универсальным для начальной стадии, независимо от сегодняшнего отношения ρ_0/ρ_c.

Второе частное решение — случай исчезающе малой плотности, $\rho_0\ll\rho_c$. В этом случае, пренебрегая в (1.2.4) членами с ρ_0, получим

$$\frac{dR}{dt}=H_0R_0=\text{const}. \tag{1.4.4}$$