где

$$f_m(\Omega)=\frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{\Omega-1}}{\Omega}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}}\right], \tag{1.3.п5}$$

$$f'(\Omega)=f+2f_m=\frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}\left[\pi+\frac{\sqrt{\Omega-1}}{\Omega}-\arcsin\sqrt{\frac{\Omega-1}{\Omega}}\right]. \tag{1.3.п6}$$

Функция f_m изображена на рис. 4. Плотность вещества проходит через максимум и затем обращается в бесконечность лишь в случае $\Omega>1$. Соответственно и формулы (1.3.5п) и (1.3.6п) определены лишь для $\Omega>1$: при Ω, приближающемся к единице, f_m и f' уходят в бесконечность пропорционально $1/(\Omega-1)^{3/2}$.

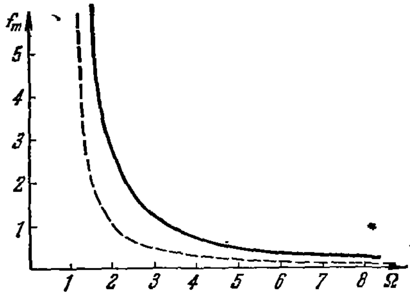

Рис. 4. Безразмерное время, необходимое для достижения максимума радиуса, как функция плотности. Сплошная линия — $P=0$, пунктирная — $P=\varepsilon/3$.

§ 4. Два частных решения. Начальная стадия

Частное решение уравнения (1.2.4) в случае $\rho_0=\rho_c$ ($\Omega=1$) имеет особенно простую форму. Уравнение (1.2.4) в этом случае приобретает вид (напомним, что мы обозначили $\rho_c=3H_0^2/8\pi G$)

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0R_0^3}{R}.$$

Решение этого уравнения с учетом (1.2.5) дает

$$R=R_0\left(\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}\right)^{2/3}, \tag{1.4.1}$$

$$t_0-t_\infty=\frac{2}{3}\frac{1}{H_0}, \tag{1.4.2}$$

и из (1.1.4) получаем

$$\rho=\frac{1}{6\pi G(t-t_\infty)^2}=\frac{8\cdot10^5}{(t-t_\infty)^2}, \tag{1.4.3}$$

где время дано в *сек*, плотность — в *г/см*³. В уравнении (1.2.4) при $\rho_0=\rho_c$ исчезает второй член. Но при любом $\rho_0\neq\rho_c$ в настоящее время надо иметь в виду, что в прошлом, вблизи t_∞, был период, для которого R было достаточно мало и, следовательно, можно было пренебречь константой — вторым членом в (1.2.4) — по сравнению с первым членом, пропорциональным $1/R$. Поэтому выражение плотности (1.4.3) является универсальным для начальной стадии, независимо от сегодняшнего отношения ρ_0/ρ_c.

Второе частное решение — случай исчезающе малой плотности, $\rho_0\ll\rho_c$. В этом случае, пренебрегая в (1.2.4) членами с ρ_0, получим

$$\frac{dR}{dt}=H_0R_0=\text{const}. \tag{1.4.4}$$

Решением этого уравнения будет

$$R=R_0+H_0R_0(t-t_0). \tag{1.4.5}$$

В этом приближении

$$t_\infty=t_0-\frac{1}{H_0}, \qquad R=H_0(t-t_\infty), \tag{1.4.6}$$

$$H=H(t)=\frac{1}{(t-t_\infty)}=\frac{H_0}{1+H_0(t-t_0)}$$

и для плотности найдем *)

$$\rho(t)=\rho_0\frac{R_0^3}{R^3}=\rho_0\left(\frac{t_0-t_\infty}{t-t_\infty}\right)^3. \tag{1.4.7}$$

Сравним плотность в прошлом, т. е. $\rho(t)$ при $t<t_0$, с критической плотностью в прошлом $\rho_c'(t)$, т. е. с величиной **)

$$\rho_c'(t)=\frac{3H^2(t)}{8\pi G}.$$

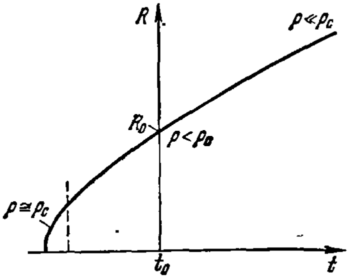

Рис. 5. Расширение при плотности меньше критической. Левее пунктирной линии — интервал времени, когда плотность близка к критической; с течением времени в ходе расширения плотность становится много меньше критической, в будущем $\rho\ll\rho_c$.

При малых $t-t_\infty\ll t_0-t_\infty$ плотность $\rho(t)$ растет быстрее, чем $\rho_c'(t)$. Поэтому при любом малом (но конечном) сегодняшнем ρ_0 в прошлом был период, когда плотность была близка к критической плотности ρ_c', вычисленной по мгновенному значению $H=H(t)$. В целом решение уравнения (1.2.4) и соответствующего уравнения для плотности (1.1.4) для случая $\rho_0<\rho_c$ $(\Omega<1)$ состоит из двух частей (см. рис. 5):

$$\rho=\frac{1}{6\pi G(t-t_\infty)^2} \quad \text{при} \quad \rho>\frac{\rho_c^3}{\rho_0^2}, \quad t-t_\infty<\frac{2\Omega}{3H_0}; \tag{1.4.8а}$$

$$\rho=\rho_0\left(\frac{t_0-t_\infty}{t-t_\infty}\right)^3 \quad \text{при} \quad \rho<\frac{\rho_c^3}{\rho_0^2}, \quad t-t_\infty>\frac{2\Omega}{3H_0}, \tag{1.4.8б}$$

а t_∞ в этом случае дается выражением [см. (1.3.п.3)]

$$t_0-t_\infty=\frac{1}{H_0}\left(1-\frac{1}{2}\Omega\ln\frac{1}{\Omega}\right). \tag{1.4.9}$$

*) Еще раз напомним, что мы пренебрегаем давлением вещества. Вблизи сингулярности ($\rho=\infty$) этого делать нельзя. О влиянии давления на закон расширения см. §§ 5—8 этой главы.

**) Еще раз подчеркнем, что под ρ_c мы везде понимаем сегодняшнее значение, вычисленное по H_0 в момент $t=t_0$; величина $\rho_c'(t)$ есть критическая плотность в момент t.

Напомним, что в (1.4.8) и (1.4.9) под ρ_c подразумевается величина, вычисленная по формуле (1.2.5) по сегодняшнему значению постоянной Хаббла, $H_0=H(t_0)$, соответственно и $\Omega=\rho_0/\rho_c=8\pi G\rho_0/3H_0^2$ вычислено по сегодняшним H_0 и ρ_0.

§ 5. Влияние давления на закон расширения. Качественные соображения

В предыдущих параграфах рассматривалось движение вещества, давлением которого можно было пренебречь. Таким веществом является, например, газ при невысокой температуре или пыль, равномерно распределенная в пространстве. Совокупность галактик также можно рассматривать как «пыль». Однако, как мы увидим дальше, на более ранней стадии расширения Вселенной основную долю плотности массы составляли фотоны, нейтрино (и гипотетические гравитоны), т. е. частицы, движущиеся со скоростью света.

Для всякого вещества плотность ρ (*г/см*^{3}) связана с плотностью энергии ε (*эрг/см*^{3}) релятивистским соотношением

$$\rho=\varepsilon/c^2. \tag{1.5.1}$$

Если для «обычного вещества» давлением можно пренебречь по сравнению с ε, то для нейтрино, фотонов и гравитонов давление сравнимо с ε:

$$P=\varepsilon/3=(\rho c^2)/3. \tag{1.5.2}$$

Влияние давления на закон расширения Вселенной интересно в связи с началом эволюции. В настоящее время имеется некоторая плотность нейтрино и фотонов, которые существовали с начала расширения (подробнее см. раздел III). Как мы сейчас покажем, из факта существования таких фотонов и нейтрино (хотя и малой плотности по сравнению с плотностью обычного вещества) следует, что в прошлом, на ранних этапах расширения, плотность нейтрино и квантов была заведомо значительно больше плотности обычного вещества, а значит, необходимо учитывать давление *). В самом деле, рассмот-

---

*) Однако и в том случае, если плотность нейтрино, фотонов и гравитонов была бы пренебрежимо мала, а температура равна нулю, учет давления все равно был бы необходим в начале эволюции, когда плотность барионов была весьма велика (от $\rho=\infty$ до плотности атомных ядер порядка $\rho\approx10^{14}$ *г/см*^{3}). При такой высокой плотности (подробно см. ТТ и ЭЗ) даже обычное вещество, состоящее из нейтронов, протонов и электронов, имеет давление порядка $\varepsilon=\rho c^2$. Высокое давление при большой плотности обусловлено двумя причинами. Нейтроны, протоны и электроны подчиняются статистике Ферми; поэтому при большой плотности их средняя скорость даже при равной нулю температуре приближается к скорости света. Следовательно, без учета взаимодействия давление асимптотически приближается к $P=\varepsilon/3$, оставаясь меньше этой величины. Кроме того, отталкивание нуклонов на близком расстоянии в принципе может привести к $P=\varepsilon$. В горячей Вселенной роль давления существенна при плотности $\rho\sim10^{-20}$ *г/см*^{3} и больше.