объеме: при расширении вещество совершает работу и энергия его уменьшается *).

Плотность для релятивистского газа, как уже было сказано, пропорциональна R^{-4} (а не R^{-3}, как было для пыли!). Поэтому масса рассматриваемого нами расширяющегося шара в случае релятивистского газа не постоянна, в более ранние моменты она была больше. Второе обстоятельство связано с тем, что в ОТО гравитационное поле создается не только плотностью массы, но и всеми другими компонентами тензора энергии-импульса T_i^k. В случае релятивистского газа компоненты T_i^k, описывающие давление ($T_1^1=T_2^2=T_3^3=-P$), того же порядка, что и плотность энергии $T_0^0=\varepsilon$, ибо $\varepsilon=P/3$. Поэтому давление равноправно с ρ участвует в создании гравитационного поля, и гравитационное ускорение, создаваемое элементом массы релятивистского газа, вдвое больше, чем создаваемое элементом массы с той же плотностью, но без давления.

Формулы, описывающие этот эффект, естественно, могут быть последовательно выведены только в рамках ОТО, так как эффект — релятивистский. Однако еще до вывода формул мы в следующем параграфе воспользуемся простым и ясным соотношением, следующим из ОТО, которое будет выведено позже (см. § 1 гл. 2), с тем, чтобы количественно рассмотреть влияние давления на закон расширения.

§ 6. Уравнения движения с учетом давления

С учетом давления, как показал Толмен (1930) [см. Паули (1958), Уиттакер (1955), ТТ и ЭЗ], ускорение притяжения **) в ОТО для покоящегося вещества равно

$$g=-\frac{4\pi R^3}{3R^2}\left(\rho+\frac{3P}{c^2}\right)=-\frac{4\pi G}{3c^2}R(\varepsilon+3P). \tag{1.6.1}$$

Мы рассматриваем шар небольшого радиуса, скорости расширения в нем малы по сравнению с c, и выражение (1.6.1) остается справедливым, хотя скорости и не в точности равны нулю.

Мак-Кри (1951) использовал приведенное выражение для того, чтобы, пользуясь только ньютоновской механикой и теорией тяготения (с заменой ρ на $\rho+\frac{3P}{c^2}$), получить закон изменения плотности и расстояний при давлении, сравнимом с плотностью энергии. Ниже воспроизведены его результаты. Рассмотрим снова шар радиуса R, внутри которого (так же как и вовне) все величины постоянны. Уравнение движения имеет вид [см. (1.6.1)]

$$\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{4\pi G}{3c^2}R(\varepsilon+3P). \tag{1.6.2}$$

*) В плотность энергии включается и энергия, соответствующая массе покоя частиц.

**) Измеренное локальным наблюдателем по его времени.

Мы выведем это уравнение в ОТО в § 1 гл. 2. Здесь мы применим его к анализу космологической проблемы. Общее число сохраняющихся частиц (нуклонов) внутри данного шара постоянно. Поэтому плотность сохраняющихся частиц

$$n=\frac{N}{4\pi R^3/3} \tag{1.6.3}$$

зависит от радиуса, как и прежде.

Однако зависимость плотности энергии от радиуса сложнее. Она удовлетворяет уравнению

$$dE=d\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right)=-P\,dV=-P4\pi R^2\,dR. \tag{1.6.4}$$

Замечательно, что совокупность уравнений (1.6.2) и (1.6.4) допускает интеграл движения очень простого и наглядного вида, похожий на (1.2.3).

Умножим (1.6.2) на $\frac{dR}{dt}$:

$$\frac{d^2R}{dt^2}\frac{dR}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=-\frac{G}{c^2}\left(\frac{4\pi}{3}R\varepsilon\frac{dR}{dt}+4\pi RP\frac{dR}{dt}\right).$$

Пользуясь (1.6.4), преобразуем выражение в скобках *):

$$\frac{4\pi}{3}\varepsilon R\frac{dR}{dt}+4\pi PR\frac{dR}{dt}=-\frac{4\pi}{3}\frac{d}{dt}(\varepsilon R^2).$$

Окончательно получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-G\frac{1}{R}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\frac{\varepsilon}{c^2}\right)=\text{const}. \tag{1.6.5}$$

Таким образом, при учете связи между давлением и энергией оказывается, что в выражение (1.6.5), в член, описывающий тяготение (пропорциональный G), входит $\rho=\varepsilon/c^2$, тогда как в выражение для ускорения (1.6.2) входит $\rho+\frac{3P}{c^2}=\frac{\varepsilon+3P}{c^2}$ Для определения константы в правой части (1.6.5) нужно подставить значения величин в настоящий момент, используя равенство $\frac{dR}{dt}=H_0R$. Результат получается в точности такой же, как и раньше: знак константы зависит от соотношения фактической плотности $\rho_0=\varepsilon_0/c^2$ в настоящее время и критической плотности ρ_c (1.2.5).

*) Так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right)=\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right)+\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\frac{d}{dt}\frac{1}{R}.$$

Заметим, что если бóльшая часть вещества состоит из частиц, движущихся со скоростью света ($P=\varepsilon/3$), то при равной плотности ускорение вдвое больше, чем при $P=0$, так как тогда

$$\frac{\varepsilon+3P}{c^2}=\frac{2\varepsilon}{c^2}=2\rho. \qquad (1.6.6)$$

Для справки отметим, что критическая плотность 10^{-29} *г/см*^{3} соответствует равновесному планковскому излучению с температурой 30°K или ферми-распределению нейтрино (ферми-газ при 0°K) с граничной энергией $7{,}5\cdot10^{-3}$ *эв* (при этом их плотность равна 10^6 нейтрино в 1 *см*^{3}).

Данные о фактической плотности электромагнитного излучения и нейтрино во Вселенной будут рассмотрены позже.

§ 7. Время расширения при наличии давления

Предположим, что плотность нейтрино и квантов значительно больше плотности обычного вещества. Тогда легко проинтегрировать уравнение (1.6.5), полагая $P=\varepsilon/3$. Результат интегрирования дан в конце § 1 гл. 2 (табл. I). Приведем результаты для возраста Вселенной:

$$t_0-t_\infty=\frac{1}{H_0}\frac{1}{1+\sqrt{\Omega}}; \qquad (1.7.1)$$

выражение справедливо как при $\Omega>1$, так и при $\Omega<1$.

Функция $f=(1+\sqrt{\Omega})^{-1}$, относящаяся к случаю $P=\varepsilon/3$, нанесена пунктиром на рис. 3.

Этот результат дает возможность получить грубую, но надежную оценку верхней границы возможной плотности нейтрино [Перес (1960); Понтекорво и Смородинский (1961); Вайнберг (1962); Зельдович и Смородинский (1961)].

В самом деле, так как возраст Земли, Солнечной системы и химических элементов порядка $(4-5)\cdot10^9$ *лет*, то следует считать, что t_0-t_∞ во всяком случае больше этой величины. Подставляя $\frac{1}{H_0}\approx10^{10}$ *лет*, получим отсюда $\Omega<4$, т. е. $\rho_\nu<8\cdot10^{-29}$ *г/см*^{3}. Эта идея оценки плотности вещества применима в равной степени для нерелятивистских частиц с массой покоя $m\neq0$, для невидимых коллапсировавших звезд или галактик, для гравитационных волн, нейтрино или других слабовзаимодействующих частиц с нулевой массой покоя. Для нейтрино в тепловом равновесии получаем $T_\nu<50$°K. Если предположить, что нейтрино распределены по закону Ферми, их энергия будет меньше 0,01 *эв*. Такие нейтрино невозможно обнаружить современными ядерно-физическими методами, тогда как