ГЛАВА 2

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

§ 1. Уравнения тяготения Эйнштейна и космологические уравнения Фридмана

В предыдущей главе локальные свойства однородной изотропной космологической модели были получены в рамках ньютоновской теории. Разумеется, для последовательного рассмотрения космологической проблемы ньютоновской теории недостаточно. Действительно, в § 1 гл. 1 нам приходилось предполагать, что в рамках ОТО, так же как и в классической ньютоновской теории, внутри сферической полости, выделенной во Вселенной, однородное, изотропно расширяющееся внешнее вещество никакого гравитационного поля не создает. Для доказательства, разумеется, надо обратиться к ОТО. Кроме того, уравнения ОТО совершенно необходимы, когда мы от локальной проблемы переходим к изучению больших областей пространства, в которых собственное тяготение вещества уже не мало и не мала скорость расширения. Рассмотрение таких областей совершенно необходимо при анализе распространения света от далеких галактик, подсчете слабых галактик и т. д.

Итак, после элементарного разъяснения сути законов расширения Вселенной обратимся к последовательному их выводу из уравнений Эйнштейна. Мы предполагаем, что читатель знаком хотя бы с элементарными основами ОТО. Для понимания дальнейшего достаточно сведений об ОТО, изложенных в гл. 1 ТТ и ЭЗ. Непревзойденным по четкости и экономности остается изложение ОТО в последних главах «Теории поля» Ландау и Лифшица.

Мы будем строить однородную изотропную модель Вселенной, т. е. модель, в которой все точки равноценны и все направления эквивалентны, ничем не выделены. В такой модели трехмерное пространство должно быть однородным и изотропным. Конечно, это трехмерное пространство вовсе не обязано быть евклидовым пространством, так как согласно ОТО геометрические свойства пространства зависят от материи, ее плотности и движения. Это может быть любое однородное изотропное трехмерное пространство. Из математики известно, что таким пространством является пространство постоянной кривизны (не зависящей от направления и от про странственных координат). Квадрат элемента длины в таком пространстве записывается в виде

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{4a^2}\right]^2}, \tag{2.1.1}$$

где $k=1$, 0, -1, величина a — постоянная, имеющая размерность длины. Если $k=0$, то мы имеем дело с обычным евклидовым пространством (иногда его называют «плоским» пространством) и x, y, z — обычные декартовы координаты. При $k=1$ пространство называют пространством постоянной положительной кривизны, при $k=-1$ — пространством постоянной отрицательной кривизны. Величину a называют радиусом кривизны пространства, а величину $C_G = k/a^2$ (гауссовой) кривизной пространства *). Мы отложим рассмотрение геометрических свойств этих пространств до следующих параграфов.

Радиус кривизны a является естественной единицей длины для измерения расстояний в случае $k \neq 0$. Поэтому перейдем к новым безразмерным координатам:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \qquad \tilde{y} = \frac{y}{a}, \qquad \tilde{z} = \frac{z}{a}. \tag{2.1.2}$$

Теперь (2.1.1) перепишется в виде

$$dl^2 = a^2 \frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2}{\left[1 + \frac{k(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)}{4}\right]^2}. \tag{2.1.3}$$

Выражение (2.1.3) формально справедливо и для $k=0$, только в этом случае a — произвольный масштабный множитель. Для евклидова пространства масштаб a ничем не выделен и может быть выбран произвольно. Рассматривая a как переменную величину (функцию времени), можно описать деформацию системы отсчета.

Теперь нашей задачей является написать выражение для четырехмерного интервала **) $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$. Пространственную часть интервала мы уже выписали [см. (2.1.3)].

В системе отсчета, в которой трехмерное пространство однородно и изотропно и метрика которого имеет вид (2.1.3), материя не может двигаться относительно системы отсчета. Действительно, скорость движения выделяла бы некоторое направление в каждой точке и, следовательно, нарушала бы изотропию. Таким образом, система

---

*) Точнее, в математике радиусом кривизны пространства называют $1/\sqrt{C_G}$, т. е. если $k=-1$, то радиус кривизны мнимый. Мы, однако, будем придерживаться терминологии, приведенной в тексте, поскольку она принята в космологии.

**) Латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Индекс «0» относится к временной координате, греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3. По дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

отсчета (2.1.3) является сопутствующей. Выберем в качестве координаты времени собственное время каждой частицы. Тогда $g_{00}=c^2$. Наконец, все компоненты $g_{0\alpha}$ в ds^2 должны быть тождественно равны нулю. В противном случае они составляли бы трехмерный вектор, также нарушающий изотропию.

Итак, выражение для ds^2 может быть записано в виде

$$ds^2=c^2\,dt^2-a^2\frac{d\tilde{x}^2+d\tilde{y}^2+d\tilde{z}^2}{\left[1+\frac{k}{4}\left(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2\right)\right]^2}. \qquad (2.1.4)$$

В выражении (2.1.4) координаты $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ являются лагранжевыми координатами частиц материи, так как материя не движется относительно системы отсчета. Все движение материи описывается деформацией самой системы отсчета. Масштабный множитель в выражении (2.1.4) зависит только от времени, $a=a(t)$. Его возрастание с течением времени описывает расширение системы отсчета, увеличение всех расстояний в системе отсчета, а значит, и расширение всего вещества, так как система отсчета является сопутствующей. Напомним, что физическое расстояние между любыми близкими частицами в нашей модели есть dl и, согласно (2.1.3), dl пропорционально $a(t)$, поскольку dx, dy, dz постоянны. Из уравнений Эйнштейна нам остается найти единственную неизвестную функцию $a(t)$.

Уравнения Эйнштейна записываются в следующем виде:

$$R_i^k-\frac{1}{2}R\delta_i^k=-\frac{8\pi G}{c^4}T_i^k. \qquad (2.1.5)$$

Здесь R_i^k — тензор Риччи, R — его след; оба они являются функциями от g_{ik}, их первых и вторых производных, δ_i^k — символы Кронекера, T_i^k — тензор энергии-импульса материи. В космологии в качестве материи чаще всего рассматривается газ. Это может быть и «обычный» газ, и газ, «молекулами» которого являются галактики, и ультрарелятивистский газ фотонов и т. д. В этом случае компоненты тензора энергии-импульса записываются в виде

$$T_i^k=(\rho c^2+P)\,u^k u_i-P\delta_i^k, \qquad (2.1.6)$$

где u^i — четырехмерная скорость материи. В сопутствующей системе отсчета [как в нашем случае (2.1.4)] компоненты T_i^k, отличные от нуля, суть

$$T_0^0=\rho c^2, \qquad T_1^1=T_2^2=T_3^3=-P. \qquad (2.1.7)$$

В однородной изотропной Вселенной ρ и P могут зависеть только от времени, но не от пространственных координат. Нашей задачей является подставить компоненты g_{ik} из (2.1.4) в уравнения Эйнштейна (2.1.5), подставить туда же (2.1.7) и определить три неизвестные функции от времени: $a(t)$, $\rho(t)$, $P(t)$. По существу, неизвестных функций только две: a и ρ, так как ρ и P связаны уравнением состояния вещества.

Упомянутые подстановки после несложных преобразований приводят к двум уравнениям *):

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right), \tag{2.1.8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}, \tag{2.1.9}$$

где k может принимать значения $k=0$, $k=1$ и $k=-1$. Эти уравнения связаны тождеством (при любом k)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{2.1.10}$$

Уравнения (2.1.8), (2.1.9) описывают зависимость a от t (т. е. всех масштабов модели от времени) и ρ от t. Они совпадают с уравнениями (1.6.2) и (1.6.5) соответственно, с той лишь разницей, что R заменено на a и произвольная const в (1.6.5) на kc^2 в (2.1.9). Мы помним, что в предыдущей главе радиус шара выбирался произвольно, нас интересовала лишь зависимость всех масштабов от времени. Следовательно, для этой зависимости от времени уравнения ОТО дают точно такие же результаты, как и ньютоновская теория в предыдущей главе.

Уравнения (2.1.8) — (2.1.10) носят название космологических уравнений Фридмана [Фридман (1963)]. Их решение подробно проанализировано в предыдущей главе.

В заключение приведем (табл. I) аналитические формулы решения уравнений (2.1.8) — (2.1.10) для двух важных случаев уравнения состояния: $P=0$ и $P=\varepsilon/3$. Решения записываются в параметрическом виде. Последний столбец таблицы дает отношение текущей плотности ρ к текущей критической плотности $\rho_c' = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$, $\Omega' = \frac{\rho}{\rho_c'}$, где $H(t) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$.

---

*) Непосредственная подстановка дает

$$\frac{8\pi G}{c^2} T_0^0 = \frac{8\pi G}{c^2}(\rho c^2) = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2},$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 = -\frac{8\pi G}{c^2} P = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}.$$

Остальные уравнения обращаются в тождества. Из приведенных уравнений сразу следуют (2.1.8), (2.1.9).

ТАБЛИЦА 1

Параметрическая зависимость радиуса кривизны пространства a, постоянной Хаббла H и плотности $\Omega = \rho/\rho_c'$ от времени t*)

Давление P	k	Время t	Радиус кривизны пространства a	Постоянная Хаббла $H \equiv \dot{a}/a$	Плотность $\Omega' = \rho/\rho_c'$
0	1	$\frac{a_m}{2c}(\eta - \sin\eta)$	$\frac{a_m}{2}(1 - \cos\eta)$	$\frac{c}{a_m}\frac{2\sin\eta}{(1-\cos\eta)^2}$	$\frac{2}{1+\cos\eta}$
	0	$\frac{a_m}{12\,c}\eta^3$	$\frac{a_m}{4}\eta^2 = \left(\frac{9a_m c^2 t^2}{4}\right)^{1/3}$	$\frac{8\,c}{a_m}\eta^{-3} = \frac{2}{3}t^{-1}$	1
	-1	$\frac{a_m}{2\,c}(\operatorname{sh}\eta - \eta)$	$\frac{a_m}{2}(\operatorname{ch}\eta - 1)$	$\frac{c}{a_m}\frac{2\operatorname{sh}\eta}{(\operatorname{ch}\eta - 1)^2}$	$\frac{2}{1+\operatorname{ch}\eta}$
$\varepsilon/3$	1	$\frac{a_m}{c}(1 - \cos\eta)$	$a_m \sin\eta$	$\frac{c}{a_m}\frac{\cos\eta}{\sin^2\eta}$	$\frac{1}{\cos^2\eta}$
	0	$\frac{a_m}{2\,c}\eta^2$	$a_m\eta = (2a_m ct)^{1/2}$	$\frac{c}{a_m}\eta^{-2} = \frac{1}{2}t^{-1}$	1
	-1	$\frac{a_m}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1)$	$a_m \operatorname{sh}\eta$	$\frac{c}{a_m}\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}^2\eta}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta}$

*) a_m — постоянная, η — параметр, имеющий следующие пределы изменения:
1) при $P=0$, $k=1$ $\quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$,
$k=0, -1$ $\quad 0 \leqslant \eta < \infty$;
2) при $P=\varepsilon/3$, $k=1$ $\quad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi$,
$k=0, -1$ $\quad 0 \leqslant \eta < \infty$.

В случае $k=0$ радиус кривизны равен бесконечности. Для этого случая приведена зависимость масштабного фактора a от времени, причем численный коэффициент выбран так, чтобы при $\eta \to 0$ разложения при всех $k=0, \pm 1$ имели одинаковый вид.

§ 2. Геометрическая структура модели Вселенной как целого; пространство постоянной положительной кривизны

Перейдем теперь к рассмотрению геометрических свойств трехмерного пространства в однородных моделях.

Эти свойства описываются выражением (2.1.3) для интервала в трехмерном пространстве. Ясно, что мы при этом описываем геометрические свойства однородной сопутствующей веществу системы отсчета (рассмотренной в предыдущем параграфе) в фиксированный момент собственного времени, или, как иногда говорят, свойства сопутствующего пространства. В ОТО системы отсчета можно выбирать произвольно. Можно было бы и в нашей задаче выбрать не