ТАБЛИЦА 1

Параметрическая зависимость радиуса кривизны пространства a, постоянной Хаббла H и плотности $\Omega' = \rho/\rho_c'$ от времени t*)

Давление P	k	Время t	Радиус кривизны пространства a	Постоянная Хаббла $H \equiv \dot{a}/a$	Плотность $\Omega' = \rho/\rho_c'$
0	1	$\frac{a_m}{2c}(\eta - \sin\eta)$	$\frac{a_m}{2}(1-\cos\eta)$	$\frac{c}{a_m}\frac{2\sin\eta}{(1-\cos\eta)^2}$	$\frac{2}{1+\cos\eta}$
	0	$\frac{a_m}{12\,c}\eta^3$	$\frac{a_m}{4}\eta^2 = \left(\frac{9a_m c^2 t^2}{4}\right)^{1/3}$	$\frac{8\,c}{a_m}\eta^{-3} = \frac{2}{3}t^{-1}$	1
	-1	$\frac{a_m}{2\,c}(\operatorname{sh}\eta - \eta)$	$\frac{a_m}{2}(\operatorname{ch}\eta - 1)$	$\frac{c}{a_m}\frac{2\operatorname{sh}\eta}{(\operatorname{ch}\eta-1)^2}$	$\frac{2}{1+\operatorname{ch}\eta}$
$\varepsilon/3$	1	$\frac{a_m}{c}(1-\cos\eta)$	$a_m \sin\eta$	$\frac{c}{a_m}\frac{\cos\eta}{\sin^2\eta}$	$\frac{1}{\cos^2\eta}$
	0	$\frac{a_m}{2c}\eta^2$	$a_m\eta = (2a_m ct)^{1/2}$	$\frac{c}{a_m}\eta^{-2} = \frac{1}{2}t^{-1}$	1
	-1	$\frac{a_m}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1)$	$a_m \operatorname{sh}\eta$	$\frac{c}{a_m}\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}^2\eta}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta}$

*) a_m — постоянная, η — параметр, имеющий следующие пределы изменения:
1) при $P=0$, $k=1$ $\quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$,
$k=0, -1$ $\quad 0 \leqslant \eta < \infty$;
2) при $P=\varepsilon/3$, $k=1$ $\quad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi$,
$k=0, -1$ $\quad 0 \leqslant \eta < \infty$.

В случае $k=0$ радиус кривизны равен бесконечности. Для этого случая приведена зависимость масштабного фактора a от времени, причем численный коэффициент выбран так, чтобы при $\eta \to 0$ разложения при всех $k=0, \pm 1$ имели одинаковый вид.

§ 2. Геометрическая структура модели Вселенной как целого; пространство постоянной положительной кривизны

Перейдем теперь к рассмотрению геометрических свойств трехмерного пространства в однородных моделях.

Эти свойства описываются выражением (2.1.3) для интервала в трехмерном пространстве. Ясно, что мы при этом описываем геометрические свойства однородной сопутствующей веществу системы отсчета (рассмотренной в предыдущем параграфе) в фиксированный момент собственного времени, или, как иногда говорят, свойства сопутствующего пространства. В ОТО системы отсчета можно выбирать произвольно. Можно было бы и в нашей задаче выбрать не сопутствующую, а какую-либо другую систему. В ней геометрические свойства трехмерного пространства были бы уже другие. Но относительно нее вещество бы двигалось, в ней не выполнялись бы свойства однородности и изотропии. Нас в первую очередь интересуют свойства расширяющегося вещества Вселенной. Вот почему сопутствующая система является преимущественной и мы займемся прежде всего изучением свойств трехмерного пространства этой системы. Они зависят от одной величины — кривизны пространства

$$C_G = \frac{k}{a^2}, \tag{2.2.1}$$

где k и a — величины, входящие в формулы (2.1.8), (2.1.9). Величину $\sqrt{1/|C_G|}=a$ называют радиусом кривизны (см. сноску на стр. 45). Подставляя в (2.2.1) величину k/a^2 из (2.1.9), получаем

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2. \tag{2.2.2}$$

Таким образом, геометрические свойства пространства зависят от наличия в нем вещества, его плотности и движения. Из (2.2.2) видно, что знак кривизны определяется тем же критерием для плотности, что и в § 2 гл. 1: если $\rho > \rho_c$ [см. (1.2.5)], то $C_G > 0$ — кривизна положительна; если $\rho < \rho_c$, то $C_G < 0$ — кривизна отрицательна.

Величина и знак кривизны одинаковы во всех точках пространства в один и тот же момент. Кроме того, так как в ходе эволюции все время сохраняется неравенство $\rho(t) > \rho_c'$ или $\rho(t) < \rho_c'$ [ρ_c' обозначает текущее значение $\rho_c(t)$], то сохраняется и знак кривизны.

Из дифференциальной геометрии известно, что трехмерное пространство постоянной отрицательной кривизны продолжимо неограниченно. Следовательно, если для постоянного момента t_0 плотность вещества меньше критической: $\rho_0 < \rho_c$, т. е. $\rho_0 < 10^{-29}$ *г/см*^{3}, то однородная Вселенная бесконечна по объему *). Это значит, что топологически модель Вселенной подобна бесконечному евклидову пространству. Такая модель получила название открытой модели Вселенной.

Если $\rho_0 > \rho_c$, то кривизна положительна, а трехмерное пространство оказывается замкнутым и конечным (но безграничным!). Все наши наглядные представления основаны на повседневном опыте и относятся к евклидову трехмерному пространству. Поэтому наглядно представить себе замкнутую Вселенную невозможно (так же, впрочем, как и открытую), можно лишь изучать математически ее свойства, сравнивать результаты расчетов с опытом и наблюдениями и

*) В этой и последующих главах мы будем рассматривать простейшие с топологической точки зрения модели. ОТО с ее идеей кривизны пространства-времени поставила вопрос о возможности более сложных топологий моделей Вселенной. Мы проанализируем эту проблему в §§ 12, 13 гл. 23.

пояснять их с помощью аналогий и моделей, являющихся неполными.

Итак, каковы свойства замкнутой Вселенной? Возьмем какую-либо точку в качестве начала координат. Построим вокруг нее сферу, т. е. рассмотрим совокупность частиц, равноудаленных от той, которая находится в начале координат. Определим такие величины, как длина экватора сферы и площадь поверхности сферы. При этом нужно иметь в виду нестационарность модели Вселенной. Длина экватора и площадь сферы, ограничивающей данную совокупность частиц, зависят от того, в какой момент мы их измерим. Все величины измеряются в один и тот же момент времени t сопутствующей системы отсчета.

Важнейший вывод теории (формулы см. далее) заключается в следующем: при $\rho_0 > \rho_c$, т. е. в случае замкнутого мира, по мере того, как мы переходим ко все более удаленным сферам длина экватора и площадь сферы вначале возрастают, но потом проходят максимум и затем уменьшаются до нуля. Понятия ближе — дальше вполне однозначны, как и понятия внутри — снаружи; более далекая сфера включает в себя не только все то вещество, которое находится в более близкой сфере, но и еще вещество, находящееся между сферами.

Сфера, более удаленная, содержащая больше вещества и имеющая больший объем, в то же время имеет меньший экватор и меньшую поверхность. Это непривычно, не похоже на евклидову геометрию, но все это является следствием кривизны пространства, и такая непривычная ситуация логически непротиворечива.

Общеизвестной аналогией является замкнутое, искривленное, двумерное пространство — поверхность обычного трехмерного шара. Возьмем северный полюс за центр. Аналогами сфер на поверхности шара являются окружности, т. е. параллели. Длина окружности вначале растет по мере удаления от северного полюса, но затем на экваторе достигается максимум, и далее длина окружности уменьшается; между тем площадь, охваченная параллелью, монотонно растет. Наконец, при приближении окружности к южному полюсу площадь, охваченная ею, становится равной $4\pi r^2$, а длина стремится к нулю.

Заметим, что в случае замкнутого мира сфера разделяет все пространство на две части, каждая из которых конечна. Объемом, заключенным внутри сферы, мы условимся всегда называть ту часть, которая включает в себя начало координат. В двумерной аналогии поверхностью, ограниченной параллелью (т. е. линией, все точки которой находятся на равном расстоянии от северного полюса), назовем поверхность части шара, лежащей севернее параллели и включающей в себя северный полюс. При таком определении стягивание параллели к южному полюсу сопровождается стремлением к $4\pi r^2$ площади поверхности, ограниченной этой параллелью.

Вернемся к трехмерному замкнутому пространству, которым является однородная Вселенная в том случае, если $\rho_0 > \rho_c$. Обращение в нуль длины экватора и поверхности сферы, описанной вокруг начала координат, при достаточном увеличении ее радиуса, т. е. удалении ее от центра, как раз и означает, что рассматриваемое трехмерное пространство является замкнутым. Можно показать, что кратчайшая линия — «геодезическая» в трехмерном пространстве возвращается к исходной точке, имеет конечную длину.

Выпишем теперь соответствующие формулы.

Запишем выражение для квадрата длины (2.1.3) в других координатах. Перейдем сначала к сферическим координатам:

$$\tilde{x} = \tilde{r} \sin\theta \cos\varphi, \quad \tilde{y} = \tilde{r} \sin\theta \sin\varphi, \quad \tilde{z} = \tilde{r} \cos\theta. \tag{2.2.3}$$

Квадрат длины теперь запишется в виде

$$dl^2 = a^2 \frac{d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}{(1 + k\tilde{r}^2/4)^2}, \qquad k = 1,\ 0,\ -1. \tag{2.2.4}$$

Теперь для случая пространства постоянной положительной кривизны $k=1$ сделаем следующую замену радиальной координаты:

$$\frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}^2/4} = \sin r. \tag{2.2.5}$$

В результате получим

$$dl^2 = a^2 [dr^2 + \sin^2 r\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]. \tag{2.2.6}$$

Разумеется, преобразования пространственных координат меняют только выражение для квадрата длины пространственного расстояния, выражение для ds^2 по-прежнему имеет вид $ds^2 = c\, dt^2 - dl^2$, где dl^2 может записываться в разных пространственных координатах, например в написанных выше. Определение времени остается без изменений.

Из (2.2.6) следует, что площадь сферы радиуса (координатного, сопутствующего) r, описанной вокруг центра, есть

$$s(r) = 4\pi a^2 \sin^2 r, \tag{2.2.7}$$

а длина экватора сферы

$$l_{\text{экв}} = 2\pi a \sin r. \tag{2.2.8}$$

Из выражения (2.2.7), видно, что s достигает максимума $s_{\max} = 4\pi a^2$ при $r = \pi/2$ и снова уменьшается до нуля при $r = \pi$. Это значение $r = \pi$ и есть тот предел, до которого может изменяться эта координата.

Объем, охваченный сферой координатного радиуса r, равен

$$V = \int_0^r s(r)\, a\, dr = 4\pi a^3 \int_0^r \sin^2 r\, dr = 4\pi a^3 \left(\frac{1}{2} r - \frac{1}{4} \sin 2r\right) \tag{2.2.9}$$

и с ростом r, естественно, монотонно возрастает. При $r=\pi$ получаем объем всего замкнутого мира *):

$$V_{\text{мира}} = 2\pi^2 a^3.$$

Соответственно, зная среднюю плотность нуклонов в единице объема n $см^{-3}$, можно найти общее число нуклонов во всей модели мира: $N_{\text{полн}} = nV_{\text{мира}}$. С помощью формулы (2.2.2) запишем выражение для радиуса кривизны a:

$$a = \frac{1}{\sqrt{C_G}} = \frac{c}{H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}. \qquad (2.2.10)$$

Напомним, что в этом разделе везде обозначено $\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$. Выражение (2.2.10) относится только к $\Omega > 1$. При Ω, близком к единице, радиус кривизны весьма велик и стремится к бесконечности при плотности, приближающейся сверху к критическому условию замкнутости, $\Omega \to 1$.

Рассмотрим обычное вещество с $\rho_0 = nm_0$, где m_0 — масса нуклона, n — их плотность. При данном значении H_0 оказывается, что общее число нуклонов N во Вселенной тем меньше, чем больше их плотность! В самом деле, при $n \gg \rho_c/m_0$, $\Omega \gg 1$ имеем из (2.2.10) $a \sim 1/\sqrt{n}$ и $V_{\text{мира}} \sim a^3 \sim n^{-3/2}$, а следовательно, общее число нуклонов $N_{\text{полн}} = nV_{\text{мира}} \sim n^{-1/2}$.

При уменьшении n общее число N возрастает вначале, как $n^{-1/2}$, а затем еще быстрее, так как при приближении n к $n_c = \rho_c/m_0$ величина N стремится к бесконечности.

До сих пор мы рассматривали свойства замкнутой Вселенной в фиксированный момент времени. Теперь вспомним, что космологи-

---

*) Разумеется, полный объем не зависит от того, в каких координатах мы проводили вычисления. Так, можно было воспользоваться координатами (2.2.4). Радиальная координата $\tilde{r}$ в них не имеет верхнего предела: $0 \leqslant \tilde{r} < \infty$. Тем не менее полный объем мира, соответствующий этим пределам, конечен и совпадает с (2.2.9):

$$V_{\text{мира}} = 4\pi a^3 \int_0^\infty \frac{\tilde{r}^2 d\tilde{r}}{(1+\tilde{r}^2/4)^3} = 2\pi^2 a^3.$$

Точно так же одинаков и максимальный физический (т. е. не координатный) радиус: $l_r = \int \sqrt{-g_{11}}\,dx^1$, где x^1 — радиальная координата. Вычисленный с помощью координат r или $\tilde{r}$, он равен

$$l_r = \int_0^\pi a\,dr = \int_0^\infty a\frac{d\tilde{r}}{1+\tilde{r}^2/2} = \pi a.$$

Замкнутость мира, конечность l_r и $V_{\text{мира}}$ суть объективные свойства трехмерного пространства постоянной положительной кривизны, не зависящие от координатной сетки, используемой для их исследования.

ческая модель нестационарна, эволюционирует со временем. Эволюция описывается зависимостью величины a от времени, $a=a(t)$. Подробно эта зависимость выписана в аналитическом виде в табл. I предыдущего параграфа. В случае замкнутого мира функция $a(t)$ начинается от нуля, достигает максимума и снова уменьшается до нуля.

§ 3. Метрика открытого мира

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства замкнутого мира; мир замкнут в том случае, если он однороден (так что, в частности, его плотность и постоянная Хаббла везде одинаковы в один и тот же момент времени) и если $\rho_0 > \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. Однако современные данные о плотности (см. об этом далее) показывают, что, по-видимому, в действительности имеет место обратное неравенство: $\rho_0 < \rho_c$.

В этом случае, как видно из уравнения (2.2.2), кривизна отрицательна и мы имеем трехмерное пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Запишем выражение dl^2 для этого случая. Заменяя при $k=-1$ радиальную координату в (2.2.4):

$$\frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}^2/4} = \operatorname{sh} r, \tag{2.3.1}$$

приходим к выражению

$$dl^2 = a^2 \left[dr^2 + \operatorname{sh}^2 r \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)\right]. \tag{2.3.2}$$

Трехмерное пространство Лобачевского бесконечно по объему.

В этом случае мир, как говорят, «открыт», т. е. качественно, топологически не отличается от обычного евклидова трехмерного пространства. В частности, полагая по-прежнему, что Вселенная однородна, мы приходим к выводу о бесконечном количестве галактик, звезд, нуклонов во Вселенной.

Вместе с тем при $\rho_0 < \rho_c$ имеет место определенное отличие метрики, т. е. количественных геометрических свойств физического пространства от евклидова. Из формулы (2.2.2) следует, что в этом случае кривизна C_G отрицательна. Поэтому в сопутствующем пространстве сумма углов треугольника меньше π: длина экватора и площадь сферы больше соответствующих евклидовых выражений.

§ 4. Предельный случай малой плотности вещества

Предельный случай малой плотности $\rho_0 \ll \frac{3H^2}{8\pi G}$ отличается особенной простотой. С той точностью, с которой можно считать $\rho_0 = 0$, можно пренебречь силами тяготения. Как уже отмечалось, в прошлом в таком мире обязательно был период, когда силой тяжести