ческая модель нестационарна, эволюционирует со временем. Эволюция описывается зависимостью величины a от времени, $a=a(t)$. Подробно эта зависимость выписана в аналитическом виде в табл. I предыдущего параграфа. В случае замкнутого мира функция $a(t)$ начинается от нуля, достигает максимума и снова уменьшается до нуля.

§ 3. Метрика открытого мира

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства замкнутого мира; мир замкнут в том случае, если он однороден (так что, в частности, его плотность и постоянная Хаббла везде одинаковы в один и тот же момент времени) и если $\rho_0>\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi G}$. Однако современные данные о плотности (см. об этом далее) показывают, что, по-видимому, в действительности имеет место обратное неравенство: $\rho_0<\rho_c$.

В этом случае, как видно из уравнения (2.2.2), кривизна отрицательна и мы имеем трехмерное пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Запишем выражение dl^2 для этого случая. Заменяя при $k=-1$ радиальную координату в (2.2.4):

$$\frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}^2/4}=\operatorname{sh} r, \tag{2.3.1}$$

приходим к выражению

$$dl^2=a^2\left[dr^2+\operatorname{sh}^2 r\,(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)\right]. \tag{2.3.2}$$

Трехмерное пространство Лобачевского бесконечно по объему.

В этом случае мир, как говорят, «открыт», т. е. качественно, топологически не отличается от обычного евклидова трехмерного пространства. В частности, полагая по-прежнему, что Вселенная однородна, мы приходим к выводу о бесконечном количестве галактик, звезд, нуклонов во Вселенной.

Вместе с тем при $\rho_0<\rho_c$ имеет место определенное отличие метрики, т. е. количественных геометрических свойств физического пространства от евклидова. Из формулы (2.2.2) следует, что в этом случае кривизна C_G отрицательна. Поэтому в сопутствующем пространстве сумма углов треугольника меньше π: длина экватора и площадь сферы больше соответствующих евклидовых выражений.

§ 4. Предельный случай малой плотности вещества

Предельный случай малой плотности $\rho_0\ll\frac{3H^2}{8\pi G}$ отличается особенной простотой. С той точностью, с которой можно считать $\rho_0=0$, можно пренебречь силами тяготения. Как уже отмечалось, в прошлом в таком мире обязательно был период, когда силой тяжести нельзя было пренебречь (см. § 4 гл. 1). Мы, однако, не будем сейчас рассматривать этот период. Вернемся к периоду, когда имеет место $\rho \ll \rho_c'$ и силы тяготения пренебрежимо малы.

Всю картину движения можно представить себе совершенно элементарно следующим образом: в плоском евклидовом пространстве в начальный момент $t=0$ из начала координат вылетает совокупность частиц, движущихся со всеми возможными скоростями u; разумеется, скорости эти не превышают скорости света, $|u| \leqslant c$. Массой частиц пренебрегаем, поэтому пренебрегаем и искривлением пространства, которое могло бы быть вызвано частицами. Следовательно, движение происходит в плоском (евклидовом) пространстве.

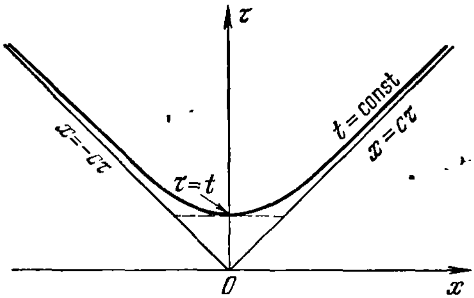

Рис. 6. Линия постоянного собственного времени $t=\mathrm{const}$ модели Милна в «лабораторной» системе координат. Пунктир — линия постоянного лабораторного времени $\tau=\mathrm{const}$.

Сопутствующее пространство этой системы, как можно видеть из (2.2.2), имеет отрицательную кривизну. На рис. 6 показано сечение пространства в «лабораторных» координатах τ, x. В этих координатах скорости частиц меньше c, так что все траектории — прямые и лежат внутри угла, образованного прямыми $x=\pm c\tau$. Итак, $x=u\tau$, $u<c$ и длина окружности, проведенной через данную точку x с центром в $x=0$, равна $2\pi x$. Собственное время t частицы, движущейся со скоростью u, выражается известной формулой специальной теории относительности:

$$t=\tau\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (2.4.1)$$

Совокупность точек, в которых находятся частицы через одинаковое собственное время $t=\mathrm{const}$, описывается уравнением

$$\tau=\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad x=u\tau=t\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (2.4.2)$$

Это — уравнение гиперболы. В самом деле, чтобы построить линию $t=\mathrm{const}$ в координатах рис. 6, мы должны задаться t и τ, найти сначала u и затем, зная u, выразить x через t и τ. Получим

$$u=c\sqrt{1-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad x=\frac{c\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}}. \qquad (2.4.3)$$

При фиксированном значении t зависимость x от τ представляет собой гиперболу, асимптотами которой являются линии $x=\pm c\tau$ (см. рис. 6). Итак, если назвать «скоростью» u' путь *), пройденный за единицу собственного времени:

$$u'=\frac{x}{t}=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{2.4.4}$$

получим величину, которая может быть и больше c. Выражение (2.4.4) полезно для популярного пояснения некоторых свойств космологических моделей Фридмана. Например, иногда спрашивают: известно, что галактики удаляются с тем большей скоростью, чем они дальше; существуют ли галактики, удаляющиеся от нас со скоростью больше скорости света? Ответ заключается в том, что такие скорости получаются при пользовании расстоянием, измеренным в лабораторной системе отсчета (т. е. в случае модели Милна в инерциальной системе наблюдателя), и собственным временем частицы, т. е. это не есть скорость перемещения частицы.

Для вычисления реальной скорости надо и расстояния и время измерить в одной и той же системе отсчета. При этом всегда $u\leqslant c$. Известно из лабораторных опытов, что мезон (пион) со временем жизни $2\cdot 10^{-8}$ *сек* может пройти до распада путь значительно больший, чем $2\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{10}$ *см* $=6\cdot 10^2$ *см*, когда его скорость близка к скорости света. Определяя трехмерное пространство из условия одинаковости собственного времени t во фридмановском решении, т. е. сопутствующее пространство, мы получили пространство, отличающееся от трехмерного «лабораторного» пространства $\tau=\mathrm{const}$. При плотности $\rho\to 0$ весь четырехмерный мир в целом (пространство-время) в пределе является плоским, четырехмерная кривизна его равна нулю, мир евклидов или, точнее, псевдоевклидов в силу особой роли времени (пространство Минковского $s^2=\tau^2-x^2-y^2-z^2$). Но его трехмерное сечение поверхностью $t=\mathrm{const}$ не плоское.

Зельманов (1959а) подчеркивает, что пространственное сечение совокупности мировых линий внутри светового конуса $x=\pm c\tau$ на рис. 6, отвечающее постоянному лабораторному времени $\tau=\mathrm{const}$, является конечным (пунктир на рис. 6): пространственная координата x ограничена значениями $-c\tau\leqslant x\leqslant c\tau$. Отсюда делается вывод, что само утверждение о конечности или бесконечности пространства не является инвариантным, ответ зависит от того, как выбрано «время» и «пространство».

Рассмотрим реальный случай, когда плотность ρ_0 хотя и мала, но конечна. В сечении $\tau=\mathrm{const}$ вблизи границы ($x=c\tau$) находятся частицы, собственное время которых мало [см. (2.4.1)]. Поэтому плотность у края возрастает. Можно показать, что в сечении $\tau=\mathrm{const}$

*) «Путь» при этом определяем по лабораторной системе координат или как длину окружности, деленную на 2π.

плотность равна $\frac{\rho_0}{1-(x/\tau)^2}$. Следовательно, даже при малом ρ_0 в сечении $\tau=\mathrm{const}$ есть область, где нельзя пренебречь плотностью вещества, нельзя пренебречь искривлением пространства, вызванным гравитационным полем вещества. При малом, но конечном ρ_0 ввести «лабораторное время» τ во всем пространстве нельзя, парадокс с конечностью пространства исчезает.

Если же поставить вопрос об общем числе N сохраняющихся частиц во Вселенной, то с самого начала нет никаких парадоксов: величина N является инвариантом в ОТО. Выше уже говорилось, что в замкнутом мире число N конечно: мы приводили конкретную формулу для $N_{\text{полн}}$. При $\rho_0<\rho_c$ в открытом мире N бесконечно, и этот вывод не зависит от способа подсчета.

В сечении $t=\mathrm{const}$ плотность $n=n_0$ постоянна, объем пространственного сечения бесконечен, $N=\infty$. Но и при рассмотрении сечения $\tau=\mathrm{const}$ (при $\rho_0\ll\rho_c$) $N=\int n\,dV=\infty$ за счет того, что плотность частиц у края $n=\frac{n_0}{1-(x/c\tau)^2}$ неограниченно растет, интегрирование по конечному объему $V=\frac{4\pi}{3}(c\tau)^3$ дает бесконечное N.

В заключение историческое замечание. Описанное выше в этом параграфе решение называют моделью Милна. Действительно, Милн (1935, 1948) впервые ввел в рассмотрение совокупность частиц, не подверженных тяготению и одновременно вылетающих из одной точки со всеми скоростями.

§ 5. Случай критической плотности

Остановимся вкратце на случае

$$\rho=\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.5.1}$$

Если это соотношение имеет место в определенный момент, то уравнения движения обеспечивают выполнение $\rho=\rho_c$ в любой другой момент времени как в прошлом, так и в будущем (притом также и при давлении, отличном от нуля).

При $\rho=\rho_c$ метрика мира особенно проста именно в сопутствующих координатах, трехмерное сечение $t=\mathrm{const}$ (t — собственное время) является евклидовым.

Выражение (2.2.4) для этого случая переписывается в виде

$$dl^2=a^2[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)]. \tag{2.5.2}$$

Это обычное выражение для расстояния в евклидовом пространстве в сферической системе координат, a — масштабный множитель. При искривленном пространстве, когда $k=\pm1$, множитель a не являлся