плотность равна $\frac{\rho_0}{1-(x/\tau)^2}$. Следовательно, даже при малом ρ_0 в сечении $\tau=\text{const}$ есть область, где нельзя пренебречь плотностью вещества, нельзя пренебречь искривлением пространства, вызванным гравитационным полем вещества. При малом, но конечном ρ_0 ввести «лабораторное время» τ во всем пространстве нельзя, парадокс с конечностью пространства исчезает.

Если же поставить вопрос об общем числе N сохраняющихся частиц во Вселенной, то с самого начала нет никаких парадоксов: величина N является инвариантом в ОТО. Выше уже говорилось, что в замкнутом мире число N конечно: мы приводили конкретную формулу для $N_{\text{полн}}$. При $\rho_0<\rho_c$ в открытом мире N бесконечно, и этот вывод не зависит от способа подсчета.

В сечении $t=\text{const}$ плотность $n=n_0$ постоянна, объем пространственного сечения бесконечен, $N=\infty$. Но и при рассмотрении сечения $\tau=\text{const}$ (при $\rho_0\ll\rho_c$) $N=\int n\,dV=\infty$ за счет того, что плотность частиц у края $n=\frac{n_0}{1-(x/c\tau)^2}$ неограниченно растет, интегрирование по конечному объему $V=\frac{4\pi}{3}(c\tau)^3$ дает бесконечное N.

В заключение историческое замечание. Описанное выше в этом параграфе решение называют моделью Милна. Действительно, Милн (1935, 1948) впервые ввел в рассмотрение совокупность частиц, не подверженных тяготению и одновременно вылетающих из одной точки со всеми скоростями.

§ 5. Случай критической плотности

Остановимся вкратце на случае

$$\rho=\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.5.1}$$

Если это соотношение имеет место в определенный момент, то уравнения движения обеспечивают выполнение $\rho=\rho_c$ в любой другой момент времени как в прошлом, так и в будущем (притом также и при давлении, отличном от нуля).

При $\rho=\rho_c$ метрика мира особенно проста именно в сопутствующих координатах, трехмерное сечение $t=\text{const}$ (t — собственное время) является евклидовым.

Выражение (2.2.4) для этого случая переписывается в виде

$$dl^2=a^2[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)]. \tag{2.5.2}$$

Это обычное выражение для расстояния в евклидовом пространстве в сферической системе координат, a — масштабный множитель. При искривленном пространстве, когда $k=\pm1$, множитель a не являлся произвольным, он был равен радиусу кривизны пространства. Этот радиус был естественным масштабом для измерения всех длин. В случае евклидова пространства это не так, радиус кривизны равен бесконечности, выделенного масштаба нет, выражение (2.5.2) допускает масштабное преобразование, и множитель a произволен. Когда мы обращаемся к расширяющемуся миру с критической плотностью (2.5.1), то в выражении для интервала

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right] \qquad (2.5.3)$$

множитель $a(t)$ определен с точностью до численной константы, не зависящей от времени.

Мы уже знаем (см. табл. I), что в простейшем случае, при $P=0$ и $\rho=\rho_c$, расстояние между каждой парой точек растет пропорционально $t^{2/3}$, т. е. $a=a_1t^{2/3}$. Константа a_1 зависит от выбора масштаба сопутствующей системы координат. В самом деле, при любом a_1 можно найти такой момент t_1, когда $a_1t_1^{2/3}=1$, $a_1=t_1^{-2/3}$. Поскольку выбор момента t_1 произволен, то произвольна и константа a_1.

Только после выбора t_1 и a_1 определяется масштаб координаты r.

В случае $P\neq0$ справедливо сказанное о произвольности выбора константы a_1. Только в этом случае зависимость a от t будет иная. Так, при $P=\varepsilon/3$ $a=a_1t^{1/2}$. Как уже отмечалось в § 4 гл. 1, в начале эволюции отличие плотности от критической всегда мало. Это справедливо и при $P=0$ и при $P\neq0$. Поэтому в начале расширения вблизи сингулярности, когда плотность велика, всегда можно производить расчеты скорости расширения с использованием закономерностей плоского мира.

Как понять факт, что мир является плоским при вполне определенной, отличной от нуля плотности вещества? Все четырехмерное многообразие пространство-время отнюдь не плоское. В случае $\rho=\rho_c$ плоскими являются лишь определенные сечения пространства-времени, в данном случае — сечения, отвечающие одинаковому собственному времени совокупности удаляющихся друг от друга частиц *).

*) Переход от системы отсчета (2.5.3), являющейся сопутствующей, к системе, в которой g_{22} не зависит от времени (называемой иногда «лабораторной»), проведен в § 4 гл. 16 нашей книги «Релятивистская астрофизика» (1967б). Для общего случая $\rho\neq\rho_c$ вычисления проделаны Станюковичем, Шаршикеевым (1970, 1973).