

системе отсчета таких наблюдателей гравитационное ускорение исчезает в начале координат, и поэтому гравитационный потенциал, нормированный на нуль в начале координат, порядка $(dr)^2$ на расстоянии dr от начала координат.

Вычисление красного смещения как интеграла по доплеровским красным смещениям между соседними свободными частицами (3.1.2) является точной процедурой. Она применима не только для однородной изотропной Вселенной, но также и в присутствии возмущений, неоднородности и анизотропии.

§ 2. Наблюдаемые величины и горизонт

Сопоставление предсказаний теории расширяющейся Вселенной с данными наблюдений является трудной, до конца не разрешенной и в настоящее время проблемой.

При изучении космологических вопросов мы имеем дело с расстояниями, на которых уже сказывается кривизна пространства. Интерес к большим расстояниям в особенности возрос после открытия квазаров с большими красными смещениями. Поэтому нельзя пользоваться евклидовой геометрией с ее наглядными привычными представлениями *). Само понятие «расстояния» не имеет определенного однозначного смысла. Необходима предварительная математическая работа для получения соотношений между наблюдаемыми величинами **). Во все формулы теории входят постоянная Хаббла и плотность материи. Постоянная Хаббла может считаться известной с точностью хотя бы $\pm 50\%$ (см. § 9 настоящей главы). Плотность материи может находиться в пределах $3 \cdot 10^{-31} - 10^{-28} \text{ г/см}^3$ за счет возможных больших количеств трудно наблюдаемых форм материи. Поэтому в ряде работ приводятся соотношения между наблюдаемыми величинами при различных предположениях о ρ_0 и H_0 ***). Ниже будет приведена сводка соответствующих формул и кривых. В принципе сравнение с наблюдениями формул, зависящих от плотности как параметра, должно привести к определению плотности. Однако параметры источников известны недостаточно хорошо. Кроме того, от далеких источников мы наблюдаем свет, испущенный давно, т. е. испущенный объектами, находящимися на более ранней стадии развития, по сравнению с близкими объектами. Поэтому обработка наблюдений зависит от предположений об эволюционном эффекте и до сих пор выводы остаются очень неопределенными.

*) Ниже, в § 4 этой главы будет специально рассмотрен вопрос о пределах применимости евклидова приближения.

**) Эта принципиальная постановка вопроса особенно подчеркнута в известных обзорах Мак-Витти (1959а, 1962а), см. также работы Сэндиджа (1961), Маттига (1958, 1959).

***) Следует упомянуть о возможности $\Lambda \neq 0$. Этот случай будет обсуждаться в гл. 4.

Начнем с качественных особенностей наблюдаемой картины. Предполагается, что был момент, когда $\rho = \infty$, $a = 0$. Условимся этот момент обозначать $t = 0$. Ясно, что нельзя увидеть свет, испущенный ранее, уже потому, что при приближении к этому моменту оптическая толща бесконечно велика, ибо $\int \sigma dx$, где σ — коэффициент поглощения света, расходится.

Можно определить, какая частица должна испустить свет в момент $t = 0$, чтобы он (двигаясь без поглощения) был принят нами сегодня, в момент $t = t_0$. Совокупность этих частиц образует сферу с центром в точке наблюдения. Эту сферу можно назвать горизонтом. Если правильны представления о том, что было $\rho = \infty$, то принципиально можно получить информацию лишь о веществе, находящемся внутри горизонта. В действительности можно видеть с помощью света еще меньшую область, ибо в начале расширения плотность вещества настолько велика, что оно непрозрачно для света. Как мы покажем в разделе III, в действительности из-за рассеяния и поглощения света можно видеть лучи из области, которая определяется тем условием, что свет, приходящий к нам сейчас, покинул ее, когда средняя плотность вещества во Вселенной была $\rho_\tau \leq 10^{-20}$ г/см³ (для нейтрино соответственно $\rho_\tau < 10^6$ г/см³). Практически, однако, расчет распространения света при расширении от ρ_τ до сегодняшней плотности ρ_0 или от $\rho = \infty$ до ρ_0 дает одинаковый результат *), ибо путь, проходимый светом (если бы он не поглощался при большой плотности) за время расширения от $\rho = \infty$ до $\rho = \rho_\tau$, много меньше, чем за время от $\rho = \rho_\tau$ до $\rho = \rho_0$.

Распространение света подчиняется условию $ds = 0$. Начало координат помещаем в точку наблюдения. Принимаемые лучи движутся к началу координат. Мы будем работать с интервалом, записанным в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dr^2 + \tilde{\varphi}^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (3.2.1)$$

причем

$$\tilde{\varphi}(r) = \sin r \quad \text{для } \Omega > 1, \quad \tilde{\varphi}(r) = \text{sh } r \quad \text{для } \Omega < 1.$$

При $\Omega = 1$ $\tilde{\varphi}(r) = r$ и мы будем вместо $a(t)$ обозначать масштаб через $b(t)$.

Вернемся к $\Omega \neq 1$. Для светового луча, распространяющегося вдоль радиуса ($d\theta = d\varphi = 0$), очевидно, $ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a^2 dr^2$, $\dot{a}(t) dr = -c dt$. Знак минус появился потому, что мы рассматриваем световой луч, приходящий к наблюдателю, находящемуся в начале

*) Напомним, что мы все время рассматриваем случай $\Lambda = 0$; $\Lambda \neq 0$ будет рассмотрено в гл. 4. Там будет показано (§ 2), что в случае $\Lambda \neq 0$, $e_\Lambda > 0$ с длинным периодом медленного расширения, и для замкнутого мира горизонта не существует; в этом случае световой луч имеет достаточно времени, чтобы обойти весь мир.

системы координат. Сопутствующая координата горизонта r_0 дается интегралом

$$r_0 = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.2.2)$$

Следует указать, что $a \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, однако интеграл не расходится. Для плоского случая $\Omega = 1$ интегрирование (3.2.2) непосредственно дает [заменяем $a(t)$ на $b(t)$]

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= 3 \frac{c}{b_1} t_0^{1/3} = 2 \frac{c}{b_1 t_0^{1/3} H_0}, \quad P = 0; \\ r_0 &= 2 \frac{c}{b_2} t_0^{1/2} = \frac{c}{b_2 t_0^{1/2} H_0}, \quad P = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

Для общего случая $\Omega \neq 1$ интегрирование удобно проводить с использованием приведенной выше, в табл. I, параметрической зависимости a от t . Интегрирование во всех случаях дает

$$r_0 = \eta_0. \quad (3.2.4)$$

Зная r_0 , можно вычислить $R_0 = a(t_0)r_0$ и $\tilde{R}_0 = a(t_0)\tilde{\varphi}(r_0)$, где $\tilde{\varphi}(r_0) = \sin r_0$ при $\Omega > 1$ и $\tilde{\varphi}(r_0) = \text{sh } r_0$ при $\Omega < 1$. Первая величина, R_0 , — это сегодняшнее расстояние до частицы, которая находится сейчас на горизонте, вторая, \tilde{R}_0 , есть деленная на 2π длина экватора сферы, на которой сегодня находятся частицы горизонта.

Далее можно найти

$$V_0 = a^3(t_0) 4\pi \int_0^{r_0} \tilde{\varphi}^2(r) dr,$$

а также

$$\tilde{M}_0 = \rho_0 V_0, \quad N_0 = n_0 V_0,$$

где V_0 — это сегодняшний объем, заключенный внутри горизонта, \tilde{M}_0 — масса частиц вещества в объеме V_0 , N_0 — полное число нуклонов в объеме V_0 (n_0 — их плотность).

Общий вид формул для R_0 , V_0 и \tilde{M}_0 удобно записать, выделяя безразмерные функции от Ω :

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{c}{H_0} S(\Omega), \\ V_0 &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 g(\Omega), \\ \tilde{M}_0 &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \rho_0 g(\Omega), \\ N_0 &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 n_0 g(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

Функции g для двух уравнений состояния (g_1 для $P=0$ и g_2 для $P=e/3$) представлены на графике рис. 7. Для справок ниже приводим формулы; следует предупредить читателя, что формулы громоздки и вычисления по ним сложны.

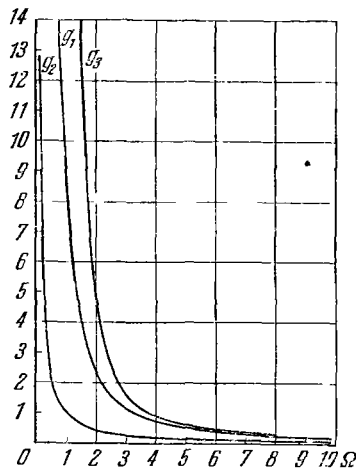


Рис. 7. Безразмерный объем области, доступной для наблюдения (внутри горизонта). Кривая g_1 для $P=0$ и кривая g_2 для $P=e/3$ как функции безразмерной плотности Ω . Для сравнения приведена кривая g_3 полного объема замкнутого мира (определенная только для $\Omega > 1$) при $P=0$.

Безразмерные функции $S(\Omega)$ и $g(\Omega)$ имеют следующий вид:
а) Случай $P=0$:

$$S = S_1 = \frac{2}{\Omega};$$

$$g_1(\Omega) = \frac{3}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[\left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(\frac{1}{\Omega} - 1 \right)} - \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(\frac{1}{\Omega} - 1 \right)} \right] \quad \text{при } \Omega < 1;$$

$$g_1(\Omega) = 8 \quad \text{при } \Omega = 1;$$

$$g_1(\Omega) = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[\arcsin \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} - \left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right] \quad \text{при } 1 \leq \Omega \leq 2;$$

$$g_1(\Omega) = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[\pi - \arcsin \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} + \left(1 - \frac{2}{\Omega} \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right] \quad \text{при } \Omega \geq 2.$$

б) Случай $P = \epsilon/3$:

$$S = S_2 = \frac{1}{\sqrt{\Omega}};$$

$$g_2 = \frac{3}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{1-\Omega}}{\Omega} - \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1}{\Omega} - 1} \right] \text{ при } \Omega < 1;$$

$$g_2 = 1 \text{ при } \Omega = 1;$$

$$g_2 = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[\operatorname{arcsin} \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega}} - \frac{1}{\Omega} \sqrt{1-\Omega} \right] \text{ при } \Omega > 1.$$

Наконец, приводим асимптотику:

$$g_1 = \frac{3\pi}{2} \Omega^{-3/2} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{3\pi}{4} \Omega^{-3/2} \quad \text{при } \Omega \gg 1;$$

$$g_1 = \frac{6}{\Omega^2} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{3}{2\Omega} \quad \text{при } \Omega \ll 1.$$

Следует особенно обратить внимание на непрерывность кривых при критическом значении плотности, т. е. при $\Omega = 1$. При этом происходит качественный скачок — изменение однородной Вселенной от бесконечной (открытой) модели при $\Omega \leq 1$ к закрытой модели при $\Omega > 1$.

При $\Omega < 1$ общий объем V , масса \bar{M} , число частиц N бесконечны, при $\Omega > 1$ величины V , \bar{M} , N конечны. Однако в обоих случаях доступная наблюдению часть Вселенной конечна, и в этом смысле различие между открытой и замкнутой Вселенной оказывается меньше, чем можно было ожидать *).

Рассмотрим случай замкнутого мира, $\Omega > 1$. Уравнение (3.2.4) позволяет судить о том, какая доля мира находится в тот или иной момент внутри горизонта наблюдателя и доступна его наблюдению.

Пусть $P = 0$. Из табл. I следует, что за все время расширения до максимума параметр η меняется от 0 до π . Из (3.2.4) следует, что r света при этом также изменится от 0 до π , что, согласно (2.2.6), соответствует прохождению света от одного полюса до другого. На фазе сжатия свет, идя от противоположного полюса, вернется к исходной точке. Это максимальный путь, который успеет пройти свет за время всей эволюции мира.

Для случая $P = \epsilon/3$ параметр η за время расширения меняется от 0 до $\pi/2$. Следовательно, свет успевает пройти при этом только половину расстояния до противоположного полюса. На фазе сжатия он доходит до противоположного полюса.

*) Общее число нуклонов в замкнутой Вселенной $N_{\text{полн}}$ (относящееся к $\Omega > 1$) также можно выразить в безразмерном виде: $N_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 n_0 g_3(\Omega)$, при этом функция $g_3 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{(\Omega-1)^{3/2}}$ и также показана на рис. 7. Заметим, что при $\Omega \gg 1$ $g_1 \rightarrow g_3$, $g_2 \rightarrow g_3/2$.

Можно ли в замкнутом мире наблюдать один и тот же объект с двух сторон? Пользуясь аналогией с земным шаром, вопрос можно поставить так: можно ли, находясь на Северном полюсе, наблюдать одну и ту же радиостанцию, один раз по ближайшему лучу, второй раз — по лучу, который обошел по дуге большого круга через Южный полюс и пришел к наблюдателю на Северном полюсе?

На земном шаре с помощью длинных радиоволн, огибающих земную поверхность, это возможно. Во Вселенной, находящейся в стадии расширения, это невозможно: слишком мало времени проходит с момента $t=0$, $\rho=\infty$. Луч, испущенный в этот момент или позже, не успеет дойти до наблюдателя к сегодняшнему моменту по длинному пути. Это может стать возможным, если $\Omega > 1$, $P=0$, через несколько миллиардов лет, когда расширение сменится сжатием и наши потомки будут говорить о (хаббловском) синем смещении. Итак, наличие в каждый момент времени горизонта позволяет видеть только конечный участок Вселенной.

Подчеркнем, что речь идет о принципиальной невозможности, определяемой не сегодняшним уровнем экспериментальной техники, а конечной скоростью распространения света; никакая нейтринная астрономия не расширит горизонта *).

Следовательно, сами утверждения о конечности или бесконечности мира принципиально связаны с экстраполяцией известной нам ситуации в нашей окрестности на области не только далекие, но и ненаблюдаемые сейчас.

Конечно, само понятие «принципиального» горизонта наблюдаемости имеет место только потому, что в космологических моделях есть момент $\rho=\infty$ и за конечное время, прошедшее от этого момента, свет от далеких областей не успевает дойти до наблюдателя.

Если вблизи сингулярности $\rho=\infty$ мир расширялся не так, как в модели Фридмана (о возможности этого см. разделы IV и V), то закон движения света там был бы иной, свет при некоторых условиях успевал бы уже вблизи сингулярности проходить огромные расстояния и горизонт бы отсутствовал. Этот вопрос мы подробно разберем в разделе IV книги. Наконец, если бы до момента сингулярности $\rho=\infty$ была бы эпоха сжатия Вселенной (см. об этом раздел V), то никакого «принципиального» горизонта бы не было, так как свет, вышедший до момента $\rho=\infty$, успеет пройти дальше и т. д. Конечно, реальный свет при этом неизбежно поглотится в эпоху очень больших ρ , но мы говорим сейчас о принципиальном горизонте для сколь угодно проникающих сквозь плотное вещество частиц. Для них горизонта не было бы. О ситуации с горизонтом в случае $\Lambda \neq 0$ и о возможности исследования проблемы эпохи до момента $\rho=\infty$ см. раздел V книги.

*) Горизонт сам постепенно расширяется с течением времени — по мере уменьшения H и увеличения t_0 . Однако для заметного увеличения R_0 , M_0 , V_0 потребуются время порядка t_0 , т. е. миллиарды лет!