

§ 3. Графики и формулы для функций, определяющих наблюдаемые величины

Для характеристики красного смещения введем величину (ω — частота)

$$\Delta = 1 - \frac{\omega_{\text{набл}}}{\omega_{\text{исп}}} = \frac{\omega_{\text{исп}} - \omega_{\text{набл}}}{\omega_{\text{исп}}}. \quad (3.3.1)$$

Очень часто применяется другая величина, z :

$$z = \frac{\lambda_{\text{набл}} - \lambda_{\text{исп}}}{\lambda_{\text{исп}}}. \quad (3.3.2)$$

Очевидно,

$$z = \frac{\Delta}{1 - \Delta},$$

$$\Delta = \frac{z}{1 + z}. \quad (3.3.3)$$

Преимущество использования Δ связано с конечной областью изменения — от $\Delta=0$ вблизи точки наблюдения до $\Delta=1$ на горизонте; $\Delta \rightarrow 1$ соответствует тому, что частота наблюдаемого света стремится к нулю; $\Delta=1$ есть предел возможности наблюдения. Переменная z меняется от 0 до ∞ , что затрудняет построение графиков *). Поскольку все же использование z широко распространено, мы даем формулы в двойной записи: с Δ и с z . Для удобства перехода от Δ к z даем таблицу:

Δ	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
z	0	0,25	0,67	1	1,5	4	∞

Заметим при этом, что для $\Delta = \alpha \ll 1$ $z \approx \alpha$, а для $\Delta = 1 - \beta$, $\beta \ll 1$ $z \approx \beta^{-1}$.

Рассмотрим угол θ , под которым виден объект данного линейного размера l . В евклидовой геометрии

$$\theta = l/R, \quad (3.3.4)$$

где R — расстояние до объекта. В кривом мире назовем, по определению, величину l/θ угловым расстоянием и обозначим через \tilde{R} . Длина окружности с центром в точке наблюдения, на которой в момент испускания света находится рассматриваемый объект, равна $2\pi\tilde{R}$. Сопоставляя с выражением интервала (3.2.1), найдем $\tilde{R} = a(t_e)\tilde{\varphi}(r_e)$, где r_e — сопутствующая координата объекта. Момент t_e испускания света задается условием, чтобы в точку наблюдения (на Землю) свет пришел сегодня. Следовательно, вблизи горизонта

*) Переменная, аналогичная Δ , введена Мак-Витти (1962б) и обозначена им Y , причем $Y + \Delta = 1$.

$t_e \rightarrow 0$, $a(t_e) \rightarrow 0$, а значит, и $\vec{R} \rightarrow 0$, т. е. угол θ неограниченно возрастает. Так как для близкого к наблюдателю объекта с его удалением (ростом r_e) угол θ убывает, а у горизонта он возрастает, то отсюда следует, что угол θ для объекта с данным l проходит через минимум при изменении r_e . Наличие минимума θ и максимума \vec{R} является общим свойством расширяющейся Вселенной, справедливым и для открытой и для закрытой модели. Наглядный подход к физической интерпретации этого минимума будет изложен в связи с расчетом углов в неоднородной Вселенной (§ 10).

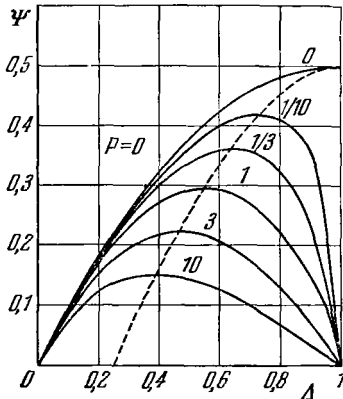


Рис. 8. Безразмерное состояние Ψ (измеренное по видимому угловому диаметру объекта с фиксированным линейным размером) в зависимости от красного смещения Δ при разных значениях безразмерной плотности Ω (значения Ω даются цифрами над кривыми) и при $P=0$. Пунктирная линия — геометрическое место максимумов кривых.

Перейдем теперь к выражению \vec{R} через красное смещение z . Для сравнительно близких объектов, при $\Delta \ll 1$, геометрия евклидова. Доплер-эффект можно рассматривать нерелятивистским образом, $d\omega = -\frac{u\omega}{c}$, изменение расстояния за время прохождения света мало. Значит, в пределе при малых Δ

$$u = c \frac{d\omega}{\omega} = c\Delta = H_0 \vec{R}, \quad \vec{R} = \frac{c}{H_0} \Delta, \quad (3.3.5)$$

$$u = cz, \quad \vec{R} = \frac{c}{H_0} z. \quad (3.3.5a)$$

Для любых расстояний можно ввести функцию безразмерного углового расстояния Ψ и написать *)

$$\vec{R} = \frac{c}{H_0} \Psi(\Delta), \quad (3.3.6)$$

$$\vec{R} = \frac{c}{H_0} \Psi(z). \quad (3.3.6a)$$

Функция Ψ находится следующим образом. По определению $\vec{R} = a(t_e) \tilde{\varphi}(r_e)$. Величины t_e и r_e связаны между собой уравнением распространения света: $dt = a dr$, и поэтому r_e выражается через t_e и сегодняшние значения H_0 и Ω . После этого остается выразить t_e через z (или через Δ). Как это делается, подробно рассказано в следующем параграфе. Здесь мы приведем окончательный ответ и разберем свойства функции Ψ .

Функция Ψ зависит не только от Δ или z , но и от отношения $\Omega = \rho_0/\rho_c$. Вид Ψ различен при $P=0$ и $P=\varepsilon/3$. Функции Ψ имеют

*) Функции $\Psi(\Delta)$ в (3.3.6) и $\Psi(z)$ в (3.3.6a) имеют разный вид, см. (3.3.9), (3.3.10).

следующие общие свойства:

$$\Psi(\Delta \rightarrow 0; \Omega) = \Delta; \quad \Psi(\Delta = 1; \Omega \neq 0) = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\Psi(z \rightarrow 0; \Omega) = z; \quad \Psi(z \rightarrow \infty; \Omega \neq 0) = 0. \quad (3.3.7a)$$

На рис. 8, 9 приведены кривые $\Psi(\Delta, \Omega)$ для $\Omega=0, 1/10, 1/3, 1, 3, 10$, причем на рис. 8 даны кривые для $P=0$, на рис. 9 — для $P=\varepsilon/3$. Следует особенно обратить внимание на предельный случай $\Omega=0$. Чем меньше Ω , тем дальше находится максимум (при Δ , близком к единице). В пределе при $\Omega=0$, т. е. для модели Милна, функция Ψ имеет простой вид:

$$\Psi(\Delta; 0) = \Delta \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right), \quad (3.3.8)$$

$$\Psi(z; 0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(1+z)^2}\right). \quad (3.3.8a)$$

Кривые для $\Omega=0$ на рис. 8 и 9, естественно, совпадают. При $\Omega=0$ функция не имеет максимума или, точнее, максимум оказывается на краю интервала определения функции, при $\Delta=1$. При большой плотности, $\Omega \gg 1$, максимум Ψ в случае $P=0$ приходится на $\Delta=0,25$ ($z=0,33$). При этом

$$\Psi_m = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Omega^{-1/2} = \frac{0,65}{\sqrt{\Omega}}.$$

Аналогично в случае $P=\varepsilon/3$

$$\Delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,29, \quad (z = \sqrt{2} - 1 = 0,41), \quad \Psi_m = \frac{1}{z\sqrt{\Omega}}.$$

Для справок приводим формулы:

$$P=0,$$

$$\Psi = \frac{2(1-\Delta)}{\Omega^2} \left[2(\Omega-1)\Delta + (\Omega-2) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 + (\Omega-2)\Delta - (\Omega-1)\Delta^2 - 1} \right], \quad (3.3.9)$$

$$\Psi = \frac{2}{\Omega^2(1+z)^2} \left\{ \Omega z + (\Omega-2) \left[\sqrt{1 + \Omega z} - 1 \right] \right\}; \quad (3.3.9a) \\ P = \varepsilon/3;$$

$$\Psi = \frac{1-\Delta}{\Omega} \left[\sqrt{1 + 2(\Omega-1)\Delta - (\Omega-1)\Delta^2 - 1 + \Delta} \right], \quad (3.3.10)$$

$$\Psi = \frac{1}{\Omega(1+z)^2} \left(\sqrt{1 + \Omega z} (z+2) - 1 \right). \quad (3.3.10a)$$

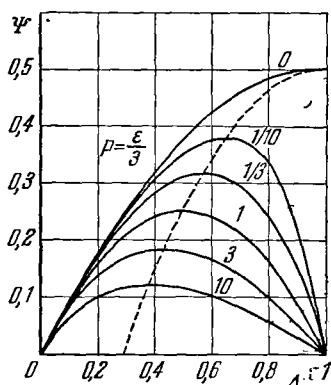


Рис. 9. То же, что и на рис. 8, но при $P=\varepsilon/3$

Разложение при малых Δ будет рассмотрено отдельно, в § 5 этой главы.

Наблюдаемая светимость объекта, для которого известны размеры, яркость и спектр, а также красное смещение, полностью определяется функцией $\Psi(\Delta, \Omega)$. Удобно расчленить вопрос о светимости на вопросы о яркости и об угловых размерах.

Мерой яркости является количество световой энергии, приходящей к наблюдателю в единицу времени на единицу площади приемника, нормального лучу, отнесенное к телесному углу, $I = \frac{d^2 E}{d\Xi} ds$.

В силу изотропии Вселенной элемент телесного угла обычным образом выражается в сферических угловых координатах, $d\Xi = \sin \theta d\varphi d\theta$. Наряду с интегральной по спектру яркостью можно ввести спектральную яркость $F(\omega)$, т. е. $dE = F(\omega) d\omega d\Xi ds$.

Из оптики известно, что в плоском пространстве яркость не зависит ни от расстояния, ни от преломления лучей, если только нет поглощения или рассеяния света.

Для расширяющейся Вселенной есть аналогичная теорема: яркость не зависит ни от чего, кроме красного смещения Δ . В частности, яркость не зависит от кривизны пространства, плотности вещества и т. п. (предполагается, что на пути луча нет поглощения или рассеяния света). В очень общей форме как следствие теоремы Лиувилля для квантов эта теорема выведена Линдквистом (1966).

Излучение черного тела, соответствующее абсолютной температуре $T_{\text{исп}}$, преобразуется в излучение черного тела с температурой

$$T_{\text{набл}} = (1 - \Delta) T_{\text{исп}} = \frac{T_{\text{исп}}}{1 + z}.$$

Формула Планка имеет вид

$$F(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = \text{const} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (3.3.11)$$

Полный поток излучения в элементе телесного угла

$$I = \int_0^{\infty} F(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot T^4, \quad (3.3.12)$$

следовательно, при красном смещении I преобразуется по закону

$$I = I_{\text{исп}} (1 - \Delta)^4, \quad (3.3.13)$$

$$I = I_{\text{исп}} (1 + z)^{-4}. \quad (3.3.13a)$$

Спектр произвольного вида, характеризуемый спектральной функцией $F(\omega)$, преобразуется по следующему закону:

$$F(\omega_{\text{набл}}) d\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta)^4 F(\omega_{\text{исп}}) d\omega_{\text{исп}} = (1 - \Delta)^3 F\left(\frac{\omega_{\text{набл}}}{1 - \Delta}\right) d\omega_{\text{набл}}; \quad (3.3.14)$$

при этом

$$\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta) \omega_{\text{исп}}, \quad d\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta) d\omega_{\text{исп}}, \quad (3.3.14a)$$

$$\omega_{\text{набл}} = \frac{\omega_{\text{исп}}}{1+z}, \quad d\omega_{\text{набл}} = \frac{d\omega_{\text{исп}}}{1+z}, \quad (3.3.14b)$$

так что интегральная (болومترическая) яркость всегда убывает, как $(1 - \Delta)^4 = (1 + z)^{-4}$, независимо от формы спектра источника.

Дифференциальный закон изменения спектральной яркости для данной фиксированной частоты зависит от вида спектра испускания. Формула для произвольного спектра испускания приведена выше [см. (3.3.14)]. В частном случае степенного спектра испускания

$$F(\omega_{\text{исп}}) d\omega_{\text{исп}} = A \omega_{\text{исп}}^n d\omega_{\text{исп}}, \quad (3.3.15)$$

наблюдаемый спектр, подвергшийся красному смещению, имеет также степенной вид:

$$F(\omega_{\text{набл}}) d\omega_{\text{набл}} = A (1 - \Delta)^{3-n} \omega_{\text{набл}}^n d\omega_{\text{набл}} = A (1 + z)^{n-3} \omega_{\text{набл}}^n d\omega_{\text{набл}}. \quad (3.3.16)$$

Выяснив закон изменения яркости, т. е. потока света в единице телесного угла, обратимся к вопросу о полном количестве света, попадающего к наблюдателю от данного небесного тела.

Далекая звезда не разрешается по угловым размерам. Измеряется не яркость ее поверхности, а поток энергии от всей звезды, приходящий на единицу поверхности в точке наблюдения.

В области, где применима евклидова геометрия, телесный угол, под которым виден источник, равен отношению проекции площади источника к квадрату расстояния:

$$\Xi = \frac{s}{R^2}. \quad (3.3.17)$$

В расширяющейся Вселенной мы должны поставить \tilde{R} вместо R , так что

$$\Xi = \frac{s}{(c\Psi/H_0)^2}. \quad (3.3.18)$$

Полное количество света, приходящееся на 1 см^2 поверхности у наблюдателя, выражается через поток энергии звезды L :

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi (c/H_0)^2} \frac{(1 - \Delta)^4}{\Psi^2}, \quad (3.3.19)$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi (c/H_0)^2} \frac{1}{\Psi^2 (1 + z)^4}. \quad (3.3.19a)$$

Можно определить «болومترическое» расстояние D как расстояние, на котором в евклидовом пространстве неподвижный объект дал бы поток энергии наблюдателю такой же, какой дает тот же объект в расширяющейся модели Фридмана.

Из сравнения (3.3.19) и (3.3.19а) и соотношения, определяющего D :

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi D^2}, \quad (3.3.20)$$

находим

$$D = \frac{c}{H_0} \frac{\Psi(\Delta, \Omega)}{(1-\Delta)^2}, \quad (3.3.21)$$

$$D = \frac{c}{H_0} (1+z)^2 \Psi(z, \Omega). \quad (3.3.21a)$$

При малых Δ имеем $\Psi(\Delta, \Omega) \approx \Delta$ и поэтому

$$D = \frac{c}{H_0} \Delta = \frac{c}{H_0} z = \bar{R},$$

т. е., естественно, все различные определения расстояния совпадают. При Δ , сравнимых с 1, знаменатель $(1-\Delta)^2$ играет большую роль. С ростом Δ величина D монотонно растет и не имеет максимума, в отличие от \bar{R} . Во всех вариантах ($P=0$, $P=e/3$, любое Ω) при $\Delta \rightarrow 1$ $D \rightarrow \infty$. Это значит, что красное смещение существенно уменьшает поток энергии далеких звезд.

Для практических наблюдений важен поток энергии в части спектра, воспринимаемой фотопластинкой или другим приемником излучения. Теория спектральных поправок (так называемая k -поправка), учитывающих чувствительность приемника, основана на формуле (3.3.14) и хорошо разработана [Уитфорд (1971), Оук (1967), Мак-Витти (1959а, б, 1962а, б), Сэндидж (1968)]; мы не будем ее здесь приводить.

В выражении (3.3.19) \tilde{E}_1 есть энергия, принимаемая в единицу собственного времени наблюдателя, тогда как L есть поток энергии звезды в единицу ее собственного времени. Здесь, как и выше, фактически учтено преобразование времени: если на звезде между двумя явлениями (например, двумя вспышками) проходит время τ , то наблюдатель воспринимает световые сигналы об этих явлениях с большим интервалом, $\tau_{\text{набл}} = \frac{\tau}{1-\Delta} = \tau(1+z)$.

Формулы, в которые входят звездные величины и которые обычно используются астрономами, см. далее, в §§ 4, 5.

Наконец, нам остается обсудить еще один тип наблюдений, связанных с количеством вещества, заключенным в слое с красным смещением между Δ и $\Delta+d\Delta$ (или z и $z+dz$). Начнем опять с классической картины: в евклидовой статической Вселенной, очевидно,

$$d\tilde{M} = \rho_0 4\pi R^2 dR, \quad (3.3.22)$$

где ρ_0 — средняя плотность вещества; или, если говорить о числе частиц (например, нуклонов),

$$dN = n_0 4\pi R^2 dR. \quad (3.3.23)$$

Подставим вместо R его выражение через Δ . При малых Δ $R = \frac{c\Delta}{H}$ и получаем

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \Delta^2 d\Delta. \quad (3.3.24)$$

Введем функцию $\xi(\Delta, \Omega)$, «исправляющую» классическую формулу: в действительности в расширяющейся искривленной Вселенной

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \xi(\Delta, \Omega) \Delta^2 d\Delta. \quad (3.3.25)$$

Функция ξ учитывает и то, что Вселенная расширяется, и раньше, т. е. при Δ , заметно отличающихся от нуля, плотность вещества была другая, и то, что пространство неевклидово. Выводится эта функция следующим образом. По определению в момент испускания света t_e в искривленном пространстве

$$dN = n(t_e) 4\pi [a(t_e) \tilde{\varphi}(r_e)]^2 a(t_e) dr_e.$$

После этого повторяем вычисления, о которых мы говорили выше при выводе функции Ψ , и получаем выражение для dN вида (3.3.25), в котором безразмерный множитель, зависящий от Δ и Ω , и называем функцией ξ .

Эта функция приведена на наших графиках для двух случаев: $P=0$ (рис. 10) и $P=e/3$ (рис. 11). Она меняется в широких пределах, поэтому для каждого случая приводится отдельно график, выполненный в большом масштабе (рис. 12, 13), на котором удобно считать значения ξ при малых $|\xi-1| < 1$. По смыслу поправки ясно, что при $\Delta \rightarrow 0$ $\xi \rightarrow 1$ при любых Ω . При малых Ω значения ξ достигают величин, во много раз превышающих единицу.

Переходя к переменной z вместо Δ , нужно дать новое определение «исправляющей» функции:

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \xi'(z, \Omega) z^2 dz. \quad (3.3.25a)$$

Новая функция ξ' связана с ξ следующим образом:

$$\xi' z^2 dz = \xi \Delta^2 d\Delta,$$

поэтому

$$\xi' = (1-\Delta)^4 \xi = (1+z)^{-4} \xi.$$

Следовательно, чтобы использовать графики рис. 10—13, работая с z вместо Δ , надо преобразовать как шкалу абсцисс, так и шкалу ординат, разделив функцию ξ на $(1+z)^4$, чтобы получить $\xi'(z, \Omega)$.

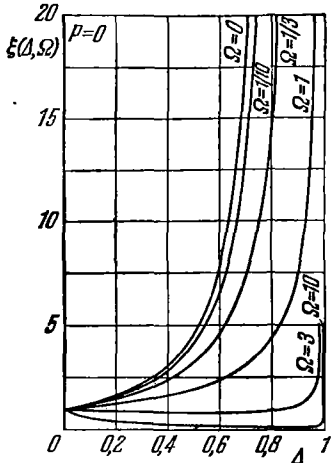


Рис. 10. Безразмерная поправка $\xi(\Delta, \Omega)$ для количества материи в слое с данным красным смещением как функция Δ для разных Ω и $P=0$.

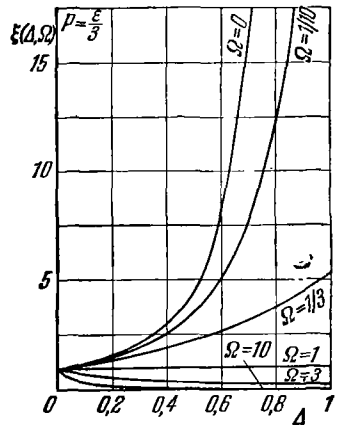


Рис. 11. То же, что и на рис. 10, но при $P=\frac{\epsilon}{3}$.

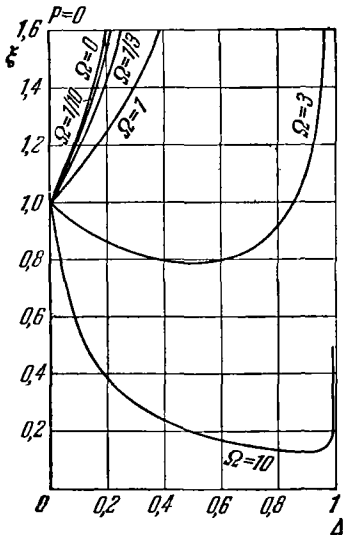


Рис. 12. То же, что на рис. 10, но в увеличенном масштабе.

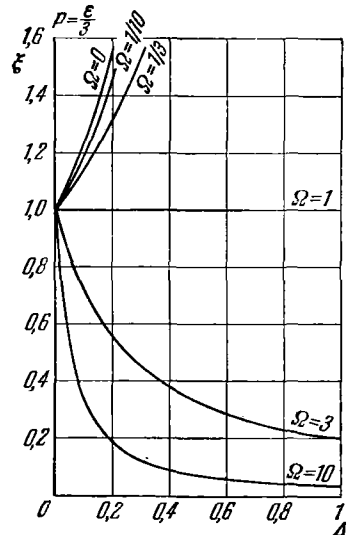


Рис. 13. То же, что на рис. 11, но в увеличенном масштабе.

Качественно поведение ξ отлично от поведения ξ' : ξ' всегда и везде имеет отрицательную производную, $\frac{\partial \xi'}{\partial z} < 0$, так что ξ' всегда падает. При малых z в обоих случаях ($P=0$, $P=\varepsilon/3$)

$$\xi' = 1 - 2z(1 + \Omega).$$

При $\Omega=0$ (модель Милна) имеют место простые формулы:

$$\xi = \frac{(2-\Delta)^2}{4(1-\Delta)^3}, \quad (3.3.26)$$

$$\xi' = \frac{(1+z)(2+z)^2}{4(1+z)^4}. \quad (3.3.26a)$$

При $P=0$ и $\Delta \rightarrow 1$ $\xi \rightarrow \infty$ при любых Ω , как видно из приведенных рисунков. Резкая зависимость ξ от Ω будет, возможно, полезна для наблюдательного определения величины Ω (см. по этому поводу §§ 9 и 10 этой главы). Через функцию ξ выражается также распределение объектов по наблюдаемой величине, которым мы займемся ниже, в § 5.

При практическом применении формулы (3.3.25) часто делается предположение, что число наблюдаемых объектов определенного типа, например число галактик в данном слое, пропорционально общему числу нуклонов в этом слое. В случае $P=0$ это предположение соответствует утверждению, что число галактик пропорционально общей массе вещества в данном слое.

Случай $P = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\rho c^2}{3}$ означает, что в общей плотности ρ главную часть составляют кванты и нейтрино, а плотность обычного вещества, из которого состоят звезды, составляет малую долю ρ . Эта доля к тому же переменная, так как в ходе расширения происходит изменение энергии квантов и нейтрино; поэтому по закону адиабатического расширения вещества с $P = \frac{\rho c^2}{3}$ плотность нуклонов

$$n = \text{const} \cdot \rho^{3/4}. \quad (3.3.27)$$

В этом случае естественно предположение, что плотность галактик (или других объектов) пропорциональна именно n , а не ρ . Поправочная функция ξ дается для dN и n , а не для dM и ρ .

Для справок приводим общие формулы (к сожалению, весьма громоздкие и неудобные), а также некоторые частные случаи.

а) Случай $P=0$:

$$\xi = \frac{4 [2(\Omega-1)\Delta + (\Omega-2)(k-1)]^2}{\Omega^4 \Delta^2 k}, \quad (3.3.28)$$

где $k = \sqrt{1 + (\Omega-2)\Delta - (\Omega-1)\Delta^3}$;

$$\xi' = \frac{4[\Omega z + (\Omega-2)(\sqrt{1+\Omega z} - 1)]^2}{\Omega^4 z^2 (1+z)^3 \sqrt{1+\Omega z}}. \quad (3.3.28a)$$

Асимптотические формулы для этого случая имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 + \Delta (2 - \Omega) \quad \text{при } \Delta \ll 1; \\ \xi &= \frac{4}{\Omega^{3/2} \sqrt{1 - \Delta}} \quad \text{при } 1 - \Delta \ll 1; \end{aligned} \right\} \quad (3.3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= 1 - z (2 + \Omega) \quad \text{при } z \ll 1; \\ \xi' &= 4\Omega^{-3/2} z^{-7/2} \quad \text{при } z \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.29a)$$

Для частного случая $\Omega=0$ нами уже получены формулы (3.3.26).
При $\Omega=1$

$$\xi = \frac{4(2 - \Delta - 2\sqrt{1 - \Delta})}{\Delta^2 \sqrt{1 - \Delta}}, \quad (3.3.30)$$

$$\xi' = \frac{4(2 + z - 2\sqrt{1 + z})\sqrt{1 + z}}{z^2(1 + z)^3}. \quad (3.3.30a)$$

б) Случай $P = \varepsilon/3$:

$$\xi = \frac{1}{\Delta^2 \Omega^2 \sqrt{\Omega - (\Omega - 1)(1 - \Delta)^2}} \{1 - \Delta - \sqrt{\Omega - (\Omega - 1)(1 - \Delta)^2}\}^2, \quad (3.3.31)$$

$$\xi' = \frac{1}{\Omega^2 z \sqrt{1 + \Omega z(z + 2)}} [1 - \sqrt{1 + \Omega z(z + 2)}]^2 (1 + z)^2; \quad (3.3.31a)$$

асимптотические формулы следующие:

$$\xi = 1 + 2\Delta(1 - \Omega) \quad \text{при } \Delta \ll 1; \quad (3.3.32)$$

$$\xi' = 1 - 2z(1 + \Omega) \quad \text{при } z \ll 1; \quad (3.3.32a)$$

$$\xi = \frac{1}{\Omega^{3/2}} \quad \text{при } 1 - \Delta \ll 1; \quad (3.3.33)$$

$$\xi' = \frac{\Omega^{-7/2}}{z^4} \quad \text{при } z \gg 1. \quad (3.3.33a)$$

Для частного случая $\Omega=1$ $\xi=1$ (тождественно при всех Δ).

Функция ξ , характеризующая распределение вещества по слоям, просто связана с функцией $g(\Omega)$ (см. выше, § 2 этой главы), дающей общее количество вещества внутри горизонта:

$$g(\Omega) = 3 \int_0^1 \xi(\Delta, \Omega) \Delta^2 d\Delta = 3 \int_0^\infty \xi'(z, \Omega) z^2 dz. \quad (3.3.34)$$

При $P=0$ и $\Delta \rightarrow 1$ $\xi \rightarrow \infty$, но так, что интеграл (3.3.34) сходится (за исключением случая, когда $\Omega=0$).

Дадим, наконец, еще одну формулу для случая $P=0$ (вывод этой формулы см. далее, в § 4):

$$H_0 dt = \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}} = \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+(\Omega-1)\Delta}} d\Delta. \quad (3.3.35)$$

Хотя сама величина dt и не является наблюдаемой, но она входит в выражения для таких наблюдаемых величин, как оптическая толщина, полное излучение из слоя с Δ (или z), меняющимся в заданных пределах, и т. п.

§ 4. Рабочие формулы с параметром z

В этом параграфе мы получим формулы, которые обычно непосредственно используются для обработки наблюдательных данных. Считают, что в настоящую эпоху и в прошлом, когда существовали отдельные объекты (галактики, квазары и пр.), давлением P можно пренебречь по сравнению с плотностью ρ . Мы увидим далее, в гл. 5, что это действительно справедливо. Перепишем формулы (2.1.8) и (2.1.10), используя обозначение $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$:

$$\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) = -\frac{4\pi G\rho(t)}{3}, \quad \frac{d\rho(t)}{dt} = -3\rho(t)H(t). \quad (3.4.1)$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{dH(t)}{d\rho(t)} = \frac{4\pi G\rho(t) + 3H^2(t)}{9\rho(t)H(t)}. \quad (3.4.2)$$

Удобно ввести новые переменные $h = h(t) = \frac{H(t)}{H_0}$ и

$$(1+z)^3 = \frac{\rho(t)}{\rho_0} = \frac{\rho(t)}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_0} = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H_0^2\Omega}.$$

В этих переменных после несложных преобразований получим

$$\frac{dh}{dz} = \frac{h}{1+z} + \frac{\Omega(1+z)^2}{2h}. \quad (3.4.3)$$

Удобство безразмерных переменных h и z и параметра Ω проявляется при решении задачи о прошлом Вселенной, когда известны параметры современного ее состояния H_0 и ρ_0 . Из этих параметров находится единственный безразмерный параметр Ω , который входит в уравнение (3.4.3). Начальные условия суть тождества: по определению $z=0$ и $h=1$ в настоящий момент. Уравнение легко интегрируется — переменные разделяются после подстановки

$$\psi^* = h^2(1+z)^{-3}. \quad (3.4.4)$$

Приводим сразу решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$h^2 = (1+z)^2(1+\Omega z). \quad (3.4.5)$$

В этой форме решение можно было получить прямо из уравнения «энергии» (2.1.9). Выразим все величины через z .