Хотя сама величина dt и не является наблюдаемой, но она входит в выражения для таких наблюдаемых величин, как оптическая толща, полное излучение из слоя с Δ (или z), меняющимся в заданных пределах, и т. п.

§ 4. Рабочие формулы с параметром z

В этом параграфе мы получим формулы, которые обычно непосредственно используются для обработки наблюдательных данных. Считают, что в настоящую эпоху и в прошлом, когда существовали отдельные объекты (галактики, квазары и пр.), давлением P можно пренебречь по сравнению с плотностью ρ. Мы увидим далее, в гл. 5, что это действительно справедливо. Перепишем формулы (2.1.8) и (2.1.10), используя обозначение $H(t)=\frac{\dot a(t)}{a(t)}$:

$$\frac{dH(t)}{dt}+H^2(t)=-\frac{4\pi G\rho(t)}{3},\qquad \frac{d\rho(t)}{dt}=-3\rho(t)H(t). \tag{3.4.1}$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{dH(t)}{d\rho(t)}=\frac{4\pi G\rho(t)+3H^2(t)}{9\rho(t)H(t)}. \tag{3.4.2}$$

Удобно ввести новые переменные $h=h(t)=\frac{H(t)}{H_0}$ и

$$(1+z)^3=\frac{\rho(t)}{\rho_0}=\frac{\rho(t)}{\rho_c}\frac{\rho_c}{\rho_0}=\frac{8\pi G\rho(t)}{3H_0^2\Omega}.$$

В этих переменных после несложных преобразований получим

$$\frac{dh}{dz}=\frac{h}{1+z}+\frac{\Omega(1+z)^2}{2h}. \tag{3.4.3}$$

Удобство безразмерных переменных h и z и параметра Ω проявляется при решении задачи о прошлом Вселенной, когда известны параметры современного ее состояния H_0 и ρ_0. Из этих параметров находится единственный безразмерный параметр Ω, который входит в уравнение (3.4.3). Начальные условия суть тождества: по определению $z=0$ и $h=1$ в настоящий момент. Уравнение легко интегрируется — переменные разделяются после подстановки

$$\psi^*=h^2(1+z)^{-3}. \tag{3.4.4}$$

Приводим сразу решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$h^2=(1+z)^2(1+\Omega z). \tag{3.4.5}$$

В этой форме решение можно было получить прямо из уравнения «энергии» (2.1.9). Выразим все величины через z.

Из уравнения (3.4.1) для $\rho(t)$ получим *)

$$\frac{d(1+z)^3}{dt} = -3H_0h(1+z)^3, \quad H_0\,dt = -h\frac{dz}{1+z}. \tag{3.4.6}$$

Подставляя сюда выражение h, имеем

$$H_0\,dt = -\frac{dz}{(1+z)^3\sqrt{1+\Omega z}}. \tag{3.4.7}$$

В ряде важных вопросов достаточно знать это дифференциальное выражение. Пусть, например, интенсивность какого-то процесса (условно — образование некоего вещества x) считается известной как функция плотности вещества и температуры во Вселенной:

$$\frac{dx}{dt} = Q(\rho, T), \quad x = \int Q\,dt. \tag{3.4.8}$$

Нет надобности вычислять $\rho(t)$ и $T(t)$ для того, чтобы взять интеграл. Удобнее воспользоваться z как переменной интегрирования. Средняя плотность просто выражается через z (из определения z в начале данного параграфа): $\rho=\rho_0(1+z)^3$. Как мы увидим в следующем разделе, температура реликтового излучения меняется по закону $T=T_0(1+z)$, так что легко написать $Q(\rho, T)=Q(z)$. Формула (3.4.7) позволит перейти к z как переменной интегрирования:

$$x = \int Q(z)\left(\frac{dt}{dz}\right)dz = \frac{1}{H_0}\int\frac{Q(z)\,dz}{(1+z)^2\sqrt{1+\Omega z}}, \tag{3.4.9}$$

причем (как уже не раз напоминалось) H_0 и Ω суть константы, сегодняшние значения. В дальнейшем при решении многих конкретных вопросов (излучение газа, поглощение излучения, рост возмущений однородности) будет широко использоваться именно z как параметр, заменяющий время t.

С помощью (3.4.7) нетрудно найти и t. При этом время t, отсчитанное от сингулярности ($z=\infty$, $t=0$), получится при подстановке соответствующего предела:

$$t = H_0^{-1}\int_z^\infty\frac{dz}{(1+z)^2\sqrt{1+\Omega z}}. \tag{3.4.10}$$

---

*) Это уравнение следует и прямо из связи между масштабом, красным смещением и постоянной Хаббла:

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z}, \quad \frac{da(t)}{dt} = -H(t)\,a(t) = -hH_0a(t).$$

Этот интеграл берется точно, аналитически:

$$t=\frac{H_0^{-1}}{1-\Omega}\left[\frac{\sqrt{1+\Omega z}}{1+z}+\begin{cases}\dfrac{\Omega}{2\sqrt{1-\Omega}}\ln\dfrac{\sqrt{1+\Omega z}-\sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z}-\sqrt{1-\Omega}}\Bigg], & \Omega<1,\\ \dfrac{\Omega}{\sqrt{1-\Omega}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1+\Omega z}}{\sqrt{\Omega-1}}\right)-\dfrac{\Omega\pi}{2\sqrt{1-\Omega}}\Bigg], & \Omega>1.\end{cases}\right. \tag{3.4.11}$$

При $\Omega=1$

$$t=\frac{2}{3H_0(z+1)^{3/2}}. \tag{3.4.12}$$

В общем случае, при $\Omega\neq1$, $\Omega\neq0$, обратить интеграл, т. е. выразить аналитической формулой z как функцию t, не удается.

Значение интеграла при $z=0$ (т. е. полный возраст Вселенной, выраженный через H_0 и Ω) дано формулами (1.3.2) и (1.3.2п), там же (рис. 3) приведена кривая зависимости $t(z=0)=\frac{1}{H_0}f(\Omega)$ от Ω.

Асимптотику $z\gg1$, $\Omega z\gg1$ легко усмотреть из интеграла (3.4.10) [а не из выражения (3.4.11)]; получим

$$t=\frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega}\,z^{3/2}}. \tag{3.4.13}$$

Отсюда вытекают все общеизвестные следствия для асимптотики при малом t и большом z. Из (3.4.13), (3.4.5) и (3.4.1) имеем

$$H(t)=\frac{2}{3t},\qquad \rho(t)=\frac{1}{6\pi Gt^2}. \tag{3.4.14}$$

Мгновенное значение Ω (t) также легко выразить через z и сегодняшнее Ω:

$$\Omega(t)=\Omega(z)=\Omega\frac{\rho(t)}{\rho_0}\frac{H_0^2}{H^2(t)}=\frac{\Omega(1+z)^3}{h^2}=$$
$$=\Omega\frac{(1+z)^3}{(1+z)^2(1+\Omega z)}=\frac{\Omega+\Omega z}{1+\Omega z}=1-\frac{1-\Omega}{1+\Omega z}. \tag{3.4.15}$$

Наглядно подтверждается, что все локальные свойства приближаются к свойствам плоского мира, Ω $(z)\to1$, при приближении к сингулярности, т. е. при росте Ωz.

Наконец, параметр z удобен и для получения формул, относящихся к наблюдаемым величинам — угловому диаметру далеких тел и болометрическому расстоянию (без вывода эти формулы приведены выше, в § 3).

Прежде всего, через H_0 и Ω выражается сегодняшний радиус мира. Для определенности будем говорить об открытой модели, $\Omega<1$ (вычисления легко повторяются для закрытой модели, $\Omega>1$).

Итак, для $\Omega<1$ имеем в настоящее время [см. (2.2.2) и определение Ω]

$$a_0=\frac{c}{H_0\sqrt{1-\Omega}}, \tag{3.4.16}$$

а в произвольный момент

$$a(z)=\frac{a_0}{1+z}=\frac{c}{H_0(1+z)\sqrt{1-\Omega}}. \tag{3.4.17}$$

Выразим через z безразмерную сопутствующую координату r точки наблюдения, т. е. найдем r для галактики, имеющей красное смещение z. Из условия $ds=0$ для света и $ds^2=c^2dt^2-a^2dr^2$ находим

$$dr=-\frac{c\,dt}{a}=\frac{\sqrt{1-\Omega}\,dz}{(1+z)\sqrt{1+\Omega z}}.$$

Соответствующий интеграл берется в элементарных функциях:

$$r=\sqrt{1-\Omega}\int\limits_0^z\frac{dz}{(1+z)\sqrt{1+\Omega z}}=-\ln\left.\frac{\sqrt{1+\Omega z}-\sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z}+\sqrt{1-\Omega}}\right|_0^z. \tag{3.4.18}$$

Видимая болометрическая (полная) светимость $\tilde{E}_1$ источника определяется количеством энергии, проходящей через единицу поверхности приемника в единицу времени. Для источника с координатой r и абсолютной светимостью L

$$\tilde{E}_1=\frac{L}{(4\pi a_0^2\,\mathrm{sh}^2\,r)(1+z)^2}. \tag{3.4.19}$$

Множитель в первых скобках в знаменателе есть площадь сферы радиуса r в момент приема света t_0 (т. е. площадь сферы, на которую растеклось излучение), второй множитель в знаменателе определяет уменьшение интенсивности света из-за красного смещения, причем один множитель $(1+z)$ описывает уменьшение энергии каждого кванта, второй множитель $(1+z)$ — уменьшение частоты прихода отдельных квантов к наблюдателю. Эту формулу можно также записать в виде

$$\tilde{E}_1=\frac{L}{4\pi\tilde{R}^2(1+z)^4}. \tag{3.4.19a}$$

Такую форму записи можно интерпретировать следующим образом: $4\pi\tilde{R}^2$ в знаменателе входит, поскольку этой величине обратно пропорционален телесный угол, под которым виден источник; второй множитель $((1+z)^4$ дает изменение яркости, так как яркость пропорциональна T^4 (эта величина определяет энергию в единице телесного угла), а $T\sim(1+z)$.

Астрономы используют не величину $\tilde{E}_1$, а звездные величины m (десятичные логарифмы потока от объекта).

По определению

$$m = -2{,}5\lg \tilde{E}_1 + \text{const}. \qquad (3.4.20)$$

Напомним, что светимость объекта L в астрономии характеризуется так называемой абсолютной звездной величиной. Абсолютной звездной величиной M объекта называется его видимая величина на расстоянии десяти парсек ($=3\cdot 10^{19}$ *см*). Если учитывается энергия от источника во всем диапазоне длин волн, то говорят о болометрических звездных величинах.

Перейдем теперь в (3.4.19) к звездным величинам согласно (3.4.20). Подставим в это выражение (3.4.16), (3.4.18) и параметр ускорения $q_0 \equiv \Omega/2$ [см. (1.2.6)], получим

$$m_{\text{бол}} = 5\lg \frac{1}{q_0^2}\left[q_0 z + (q_0 - 1)\left(\sqrt{1+2q_0 z} - 1\right)\right] + C_1. \qquad (3.4.21)$$

Величина C_1 зависит только от абсолютной звездной величины источника M (или, что то же, от L) и от H_0. Конкретно, используя определение M, получаем

$$C_1 = M \text{ (в момент испускания света)} - 45{,}06 - 5\lg H_0, \qquad (3.4.22)$$

где H_0 выражено в $сек^{-1}$.

Формула (3.4.21) справедлива и для закрытой модели, т. е. когда $\Omega > 1$, $q_0 > {}^1/_2$. Эта изящная формула была получена Маттигом (1958) и используется для анализа соотношения звездная величина — красное смещение в космологии. В следующем параграфе мы получим другую формулу, пригодную для анализа объектов с небольшим красным смещением ($z < 0{,}3$).

§ 5. Первое приближение и евклидово пространство

Выше мы систематически сравнивали общие результаты, полученные для различных космологических моделей, с простейшей классической картиной евклидовой Вселенной, в которой определено единственное элементарное понятие расстояния R, количество получаемого наблюдателем света от неподвижного источника убывает, как R^{-2}, объем растет, как R^3, а общая плотность вещества никак не влияет ни на структуру пространства, ни на наблюдаемые зависимости.

Точные формулы, относящиеся к теории расширяющейся Вселенной, зависят как от плотности материи, так и от ее уравнения состояния; в частности, выше давались формулы для $P=0$ и $P=\varepsilon/3$.

Ясно, что при экспериментальном исследовании в первую очередь и с большей точностью будут получены данные в более близких к нам областях. Естественно при их обработке разложить теоретические формулы в ряд по возрастающим степеням Δ или z. В этом ряду первый член обязательно должен совпадать с классической