По определению

$$m = -2{,}5\lg \tilde{E}_1 + \text{const}. \tag{3.4.20}$$

Напомним, что светимость объекта L в астрономии характеризуется так называемой абсолютной звездной величиной. Абсолютной звездной величиной M объекта называется его видимая величина на расстоянии десяти парсек ($=3\cdot 10^{19}$ *см*). Если учитывается энергия от источника во всем диапазоне длин волн, то говорят о болометрических звездных величинах.

Перейдем теперь в (3.4.19) к звездным величинам согласно (3.4.20). Подставим в это выражение (3.4.16), (3.4.18) и параметр ускорения $q_0 \equiv \Omega/2$ [см. (1.2.6)], получим

$$m_{\text{бол}} = 5\lg\frac{1}{q_0^2}\left[q_0 z + (q_0 - 1)\left(\sqrt{1+2q_0 z} - 1\right)\right] + C_1. \tag{3.4.21}$$

Величина C_1 зависит только от абсолютной звездной величины источника M (или, что то же, от L) и от H_0. Конкретно, используя определение M, получаем

$$C_1 = M \text{ (в момент испускания света)} - 45{,}06 - 5\lg H_0, \tag{3.4.22}$$

где H_0 выражено в *сек*$^{-1}$.

Формула (3.4.21) справедлива и для закрытой модели, т. е. когда $\Omega > 1$, $q_0 > {}^1/_2$. Эта изящная формула была получена Маттигом (1958) и используется для анализа соотношения звездная величина — красное смещение в космологии. В следующем параграфе мы получим другую формулу, пригодную для анализа объектов с небольшим красным смещением ($z < 0{,}3$).

§ 5. Первое приближение и евклидово пространство

Выше мы систематически сравнивали общие результаты, полученные для различных космологических моделей, с простейшей классической картиной евклидовой Вселенной, в которой определено единственное элементарное понятие расстояния R, количество получаемого наблюдателем света от неподвижного источника убывает, как R^{-2}, объем растет, как R^3, а общая плотность вещества никак не влияет ни на структуру пространства, ни на наблюдаемые зависимости.

Точные формулы, относящиеся к теории расширяющейся Вселенной, зависят как от плотности материи, так и от ее уравнения состояния; в частности, выше давались формулы для $P=0$ и $P=\varepsilon/3$.

Ясно, что при экспериментальном исследовании в первую очередь и с большей точностью будут получены данные в более близких к нам областях. Естественно при их обработке разложить теоретические формулы в ряд по возрастающим степеням Δ или z. В этом ряду первый член обязательно должен совпадать с классической картиной, а следующие члены представляют собой поправки к этой картине. При этом под классической картиной мы понимаем расширяющуюся Вселенную в ньютоновской теории, без каких-либо релятивистских эффектов.

Но поправки, зависящие от кривизны пространства, пропорциональны квадрату расстояния. Эти поправки должны быть пропорциональны плотности, а чтобы получить безразмерную величину, нужно взять комбинацию $G\rho R^2/c^2$. Расстояние пропорционально красному смещению, следовательно, указанные поправки порядка Δ^2. Отсюда следует вывод, что формулы, в которые включены только члены первого порядка по Δ, могут быть получены без учета кривизны пространства.

Рассмотрим картину движения в евклидовом пространстве и лабораторном времени, пользуясь ньютоновской теорией тяготения *). Систему координат выбираем так, что наблюдатель находится в начале координат и покоится. За нуль времени берем сегодняшний момент (момент наблюдения), а не так, как выше, где принималось $t=0$ в момент сингулярности $\rho=\infty$. Рассматриваем случай $P=0$. Для сегодняшнего момента, т. е. при $t=0$, имеем заданную постоянную во всем пространстве плотность вещества ρ_0 и хаббловское поле скоростей $u=H_0R$.

Напишем гидродинамические уравнения неразрывности и движения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}\rho u=-3H\rho,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{G\frac{4\pi}{3}\rho R^3}{R^2},\end{aligned}\right\}\qquad(3.5.1)$$

и найдем первые члены разложения решения в ряд по малому t:

$$\left.\begin{aligned} &\rho=\rho_0-3H_0t\rho_0,\\ &u=H_0R-H_0^2Rt-\frac{4\pi}{3}G\rho_0Rt.\end{aligned}\right\}\qquad(3.5.2)$$

Вспоминая определения $\rho_c=\dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$ и $\Omega=\dfrac{\rho_0}{\rho_c}$, последнюю формулу перепишем так:

$$u=H_0R-H_0^2\left(1+\frac{\Omega}{2}\right)Rt.\qquad(3.5.3)$$

Рассмотрим распространение света и красное смещение. Уравнение луча, приходящего в начало координат в момент $t=0$, есть

$$R=-ct,\qquad(3.5.4)$$

*) Относительное различие между собственным временем и лабораторным временем тоже порядка Δ^2, следовательно, в рассматриваемом приближении его можно не принимать во внимание точно так же как и кривизну пространства.

где R — расстояние тела от начала координат в момент испускания (в этот момент, очевидно, $t<0$).

Учтем сначала только красное смещение, связанное с доплер-эффектом движения источника света. Мы обозначим эту часть красного смещения через Δ'.

Частота света ω' в лабораторной системе, испущенного с частотой ω_0 частицей, движущейся со скоростью u, дается формулой специальной теории относительности:

$$1-\Delta=\frac{\omega'}{\omega_0}=\frac{\sqrt{1-u/c}}{\sqrt{1+u/c}}. \qquad (3.5.5)$$

Мы строим формулы, включающие поправки к классическим формулам порядка Δ, но не более высокие. Поэтому и выражение Δ разлагаем в ряд и оставляем только

$$1-\Delta=1-\frac{u}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2, \qquad \Delta'=\frac{u}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2. \qquad (3.5.6)$$

Для получения полного красного смещения Δ с нужной точностью теперь необходимо еще учесть изменение частоты света при его движении в поле тяжести от точки испускания R до начала координат:

$$\omega-\omega'=\frac{\varphi(R)-\varphi(0)}{c^2}\,\omega', \qquad (3.5.7)$$

где φ — ньютоновский гравитационный потенциал.

Из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi=4\pi\rho G \qquad (3.5.8)$$

и из сферической симметрии задачи находим

$$\varphi=\mathrm{const}+\frac{2\pi}{3}G\rho R^2. \qquad (3.5.9)$$

В нашем приближении заменим ρ на ρ_0, ω' на ω_0 и найдем

$$\left.\begin{aligned}\omega-\omega'&=\frac{2\pi}{3c^2}G\rho_0R^2\omega_0,\\ \Delta&=\frac{u}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2-\frac{2\pi}{3c^2}G\rho_0R^2.\end{aligned}\right\} \qquad (3.5.10)$$

Подставим сюда выражение скорости (3.5.3) и выразим момент испускания через R с помощью (3.5.4). Подставляя затем выражение $\rho_0=\Omega\frac{3H_0^2}{8\pi G}$, получим окончательно в нужном приближении (опуская члены порядка R^3 и выше):

$$\Delta=\frac{H_0}{c}R+\frac{H_0^2}{c^2}\left(1+\frac{\Omega}{2}\right)R^2-\frac{1}{2}\frac{H_0^2R^2}{c^2}-\frac{H_0^2}{c^2}\frac{\Omega}{4}R^2=$$

$$=\frac{H_0}{c}R+\frac{H_0^2}{c^2}R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\Omega}{4}\right). \qquad (3.5.11)$$

Решая это уравнение с нужной точностью, получим

$$R=\frac{c}{H_0}\left[\Delta-\left(\frac{1}{2}+\frac{\Omega}{4}\right)\Delta^2\right], \tag{3.5.12}$$

$$R=\frac{c}{H_0}\left[z-\left(\frac{3}{2}+\frac{\Omega}{4}\right)z^2\right] \tag{3.5.12a}$$

и, соответственно, для момента испускания света, который придет в точку наблюдения (начало координат) с данным красным смещением в момент $t=0$:

$$t=-\frac{1}{H_0}\left[\Delta-\left(\frac{1}{2}+\frac{\Omega}{4}\right)\Delta^2\right], \tag{3.5.13}$$

$$t=-\frac{1}{H_0}\left[z-\left(\frac{3}{2}+\frac{\Omega}{4}\right)z^2\right]. \tag{3.5.13a}$$

Напомним, что R есть расстояние источника именно в момент t испускания света, который принят в момент $t=0$ с красным смещением Δ наблюдателем, находящимся в начале координат.

Выражение R, выведенное выше, совпадает с первыми двумя членами разложения в ряд по степеням Δ общей формулы (3.3.9).

В нашем приближении — приближении евклидовой геометрии — расстояние имеет единственный смысл. В этой геометрии очевидным образом находится угловой размер источника, абсолютный размер которого равен l. Угловое расстояние — это и есть R, так что

$$\theta=\frac{l}{R}=\frac{lH_0}{c}\frac{1}{\Delta}\left[1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\Omega}{4}\right)\Delta\right], \tag{3.5.14}$$

$$\theta=\frac{lH_0}{cz}\left[1+\left(\frac{3}{2}+\frac{\Omega}{4}\right)z\right]. \tag{3.5.14a}$$

Поправка к элементарной формуле евклидовой геометрии $\theta=\frac{lH_0}{c\Delta}$ $\left(\text{причем } R=\frac{c\Delta}{H_0}\right)$ связана только с поправками к линейной зависимости между расстоянием в момент испускания света и красным смещением.

Как было показано выше [см. (3.3.20)],

$$\tilde{E}_1=\frac{L}{4\pi D^2}=\frac{L(1-\Delta)^4}{4\pi R^2},$$

откуда, разлагая в ряд и оставляя члены первого порядка по Δ, найдем

$$\tilde{E}_1=\frac{L}{4\pi(c/H_0)^2}\frac{1}{\Delta^2}\left[1-\left(3-\frac{\Omega}{2}\right)\Delta\right], \tag{3.5.15}$$

$$D=\frac{R}{(1-\Delta)^2}=\frac{c}{H_0}\Delta\left[1+\left(\frac{3}{2}-\frac{\Omega}{4}\right)\Delta\right], \tag{3.5.16}$$

$$D=\frac{cz}{H_0}\left[1+\left(\frac{5}{2}-\frac{\Omega}{4}\right)z\right]. \tag{3.5.16a}$$

Найдем выражение для массы $\tilde{M}$, заключенной внутри сферы радиуса R в момент испускания света. Подставляя t из (3.5.13) в (3.5.2), найдем

$$\rho = \rho_0 (1+3\Delta),$$
$$\tilde{M} = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{c}{H_0}\Delta\right)^3 \left[1+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\Omega\right)\Delta\right]. \quad (3.5.17)$$

Теперь легко найти производную

$$\frac{d\tilde{M}}{d\Delta} = 4\pi\rho_0 \left(\frac{c}{H_0}\Delta\right)^2 [1+(2-\Omega)\Delta]\frac{c}{H_0}. \quad (3.5.18)$$

Величина в квадратных скобках есть функция $\xi(\Delta, \Omega)$ [см. (3.3.25)] или, точнее, первые два члена разложения ее в ряд Тейлора:

$$\xi = 1+(2-\Omega)\Delta. \quad (3.5.19)$$

Выведенные формулы дают все сведения, необходимые для обработки наблюдений при не слишком больших Δ ($\Delta<0{,}3$).

Выше рассматривался только случай $P=0$. В случае произвольного давления гравитационное поле и ускорение силы тяжести зависят от комбинации $\rho+\frac{3P}{c^2}$, тогда как выражение критической плотности не изменяется. Поэтому при $P\neq 0$ надо везде подставить вместо Ω величину

$$\Omega' = \Omega\left(1+\frac{3P}{\rho c^2}\right). \quad (3.5.20)$$

В частности *), $\Omega'=2\Omega$ при $P=\frac{\rho c^2}{3}$. [Если $\Lambda\neq 0, \Omega'=\Omega\left(\frac{1+\Lambda c^2}{4\pi G\rho}\right)$].

Соответственно и обработка наблюдений (для области $\Delta<0{,}3$) дает именно величину Ω': в сущности, мы измеряем ускорение силы тяжести. Если $1<\Omega'<2$, то для Вселенной, заполненной обычным веществом, $P=0$, $\Omega=\Omega'>1$ и мир замкнут. Но для Вселенной, заполненной в основном квантами и нейтрино, в этом случае $\Omega=\frac{\Omega'}{2}<1$ и мир открыт.

В ряде книг и обзоров расширяющаяся Вселенная характеризуется двумя параметрами:

$$h_1 = \frac{\dot{l}_{ab}}{l_{ab}}, \qquad h_2 = \frac{\ddot{l}_{ab}}{l_{ab}}, \quad (3.5.21)$$

где l_{ab} — расстояние между двумя точками среды.

---

*) Легко проверить что формулы, которые получаются при замене Ω на $\Omega'=2\Omega$ в (3.5.12), (3.5.15), (3.5.16), (3.5.19), совпадают с первыми членами разложения в ряд (3.3.10), (3.3.31); см. также (3.3.32).

Так как расстояние между любой парой объектов пропорционально радиусу мира $a(t)$, то формулы (3.5.21) эквивалентны формулам

$$h_1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad h_2 = \frac{\ddot{a}}{a}. \tag{3.5.22}$$

Константа h_1 есть не что иное, как постоянная Хаббла, $h_1 = H_0$. Величина h_2 зависит от плотности:

$$h_2 = -\frac{4\pi}{3} G\rho \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2}\right). \tag{3.5.23}$$

Вместо h_2 иногда вводят безразмерный коэффициент ускорения [см. (1.2.6)], который можно выразить через Ω:

$$q_0 = -\frac{h_2}{h_1^2} = \frac{1}{2}\Omega\left(1 + \frac{3P}{\rho c^2}\right) = \frac{\Omega'}{2}. \tag{8.5.24}$$

Итак, в случае $P=0$ критическое значение $q_0 = 1/2$ отделяет замкнутый мир (при $q_0 > 1/2$) от открытого ($0 < q_0 < 1/2$). В случае $P = \varepsilon/3$ критическое значение $q_0 = 1$. Вывод из рассуждений данного параграфа заключается в том, что формулы, линейные по q_0 и содержащие поправки порядка Δ (но не Δ^2), не содержат эффектов кривизны пространства и могут быть последовательно выведены в евклидовом пространстве с помощью ньютоновской теории тяготения (с учетом гравитационного изменения частоты кванта и точной формулы доплер-эффекта).

В заключение параграфа перепишем формулу (3.5.15) в виде, привычном для астрономов, т. е. перейдем к звездным величинам z и параметру q_0:

$$m_{\text{бол}} = 5\lg z + 1{,}086\,(1 - q_0)\,z + C_1, \tag{3.5.25}$$

где выражение для C_1 дается формулой (3.4.22). Формула (3.5.25) справедлива для $z < 0{,}3$. Она была получена Гекманом (1942), Робертсоном (1955), Мак-Витти (1956).

§ 6. Распределение по видимым величинам

В классическом случае, когда можно не учитывать кривизну пространства, влияние красного смещения на яркость и эволюционный эффект, получаются общеизвестные четкие зависимости для распределения объектов данного типа по видимой величине.

Рассмотрим объекты с абсолютной светимостью L. Плотность распределения таких объектов в пространстве обозначим n. Количество света, получаемое наблюдателем от каждого объекта, находящегося на расстоянии R,

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi R^2}, \tag{3.6.1}$$