Так как расстояние между любой парой объектов пропорционально радиусу мира $a(t)$, то формулы (3.5.21) эквивалентны формулам

$$h_1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad h_2 = \frac{\ddot{a}}{a}. \tag{3.5.22}$$

Константа h_1 есть не что иное, как постоянная Хаббла, $h_1 = H_0$. Величина h_2 зависит от плотности:

$$h_2 = -\frac{4\pi}{3} G\rho \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2}\right). \tag{3.5.23}$$

Вместо h_2 иногда вводят безразмерный коэффициент ускорения [см. (1.2.6)], который можно выразить через Ω:

$$q_0 = -\frac{h_2}{h_1^2} = \frac{1}{2}\Omega\left(1 + \frac{3P}{\rho c^2}\right) = \frac{\Omega'}{2}. \tag{8.5.24}$$

Итак, в случае $P=0$ критическое значение $q_0 = 1/2$ отделяет замкнутый мир (при $q_0 > 1/2$) от открытого ($0 < q_0 < 1/2$). В случае $P = \varepsilon/3$ критическое значение $q_0 = 1$. Вывод из рассуждений данного параграфа заключается в том, что формулы, линейные по q_0 и содержащие поправки порядка Δ (но не Δ^2), не содержат эффектов кривизны пространства и могут быть последовательно выведены в евклидовом пространстве с помощью ньютоновской теории тяготения (с учетом гравитационного изменения частоты кванта и точной формулы доплер-эффекта).

В заключение параграфа перепишем формулу (3.5.15) в виде, привычном для астрономов, т. е. перейдем к звездным величинам z и параметру q_0:

$$m_{\text{бол}} = 5 \lg z + 1{,}086\,(1 - q_0)\,z + C_1, \tag{3.5.25}$$

где выражение для C_1 дается формулой (3.4.22). Формула (3.5.25) справедлива для $z < 0{,}3$. Она была получена Гекманом (1942), Робертсоном (1955), Мак-Витти (1956).

§ 6. Распределение по видимым величинам

В классическом случае, когда можно не учитывать кривизну пространства, влияние красного смещения на яркость и эволюционный эффект, получаются общеизвестные четкие зависимости для распределения объектов данного типа по видимой величине.

Рассмотрим объекты с абсолютной светимостью L. Плотность распределения таких объектов в пространстве обозначим n. Количество света, получаемое наблюдателем от каждого объекта, находящегося на расстоянии R,

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi R^2}, \tag{3.6.1}$$

так что

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\tilde{E}_1}}. \tag{3.6.2}$$

Число объектов внутри шара радиуса R, дающих световой поток больше $\tilde{E}_1$, равно

$$N = \frac{4\pi}{3} R^3 n = \mathrm{const}\cdot n L^{3/2} \tilde{E}_1^{-3/2}. \tag{3.6.3}$$

Соответствующий дифференциальный закон:

$$dN = \mathrm{const}\cdot \tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1. \tag{3.6.4}$$

Пользуясь величиной m (3.4.20), найдем

$$dN = \mathrm{const}\cdot 10^{0,6m}\, dm. \tag{3.6.5}$$

Хорошо известно, что при наличии объектов разных типов (светимостей) этот закон не изменяется. Для дальнейшего полезно привести элементарное доказательство. Пусть в элементе объема имеется определенное распределение объектов по абсолютной величине или, что то же, по светимости. Именно, пусть число объектов со светимостью между L и $L+dL$ есть

$$dn = n_0 W(L)\, dL. \tag{3.6.6}$$

Распределение нормировано на единицу, $\int\limits_0^\infty W(L)\, dL = 1$, так что $W(L)\, dL$ есть доля объектов с данным L в интервале dL, а общая их плотность равна n_0. Для каждой группы объектов светимостью между L и $L+dL$, находящихся на разных расстояниях и потому дающих разное $\tilde{E}_1$, получим

$$d_2 N = \mathrm{const}\cdot W(L)\, L^{3/2}\, \tilde{E}_1^{-5/2}\, dL\, d\tilde{E}_1. \tag{3.6.7}$$

Знак d_2 означает, что справа стоят два дифференциала $dL\, d\tilde{E}_1$.

Интегрирование по dL можно выполнить отдельно; получим

$$dN = A\tilde{E}_1^{-5/2}\, d\tilde{E}_1, \tag{3.6.8}$$

где

$$A = \mathrm{const}\cdot n_0 \int\limits_0^\infty L^{3/2} W(L)\, dL. \tag{3.6.9}$$

Таким образом, закон распределения объектов по видимой величине, $\frac{dN}{d\tilde{E}_1}$, не изменился, только вместо одинаковой светимости всех объектов L в (3.6.3) теперь вошла величина A, определенным образом взвешенная по распределению $W(L)$. Это взвешивание несколько отличается от того выражения, которое дает полное количество света, испускаемого единицей объема *).

В расширяющейся Вселенной для объектов данной абсолютной величины получается более сложный закон, так как видимая и абсолютная величины и число объектов в данной сфере связаны сложными, не степенными зависимостями. Кроме того, при больших расстояниях велико время распространения света от момента испускания до наблюдения. Поэтому надо учесть и эволюционный эффект, т. е. изменение распределения объектов по абсолютной величине со временем. Общие формулы чрезвычайно громоздки и необозримы. Приведем лишь формулу второго приближения, которая может быть получена методом, подобным описанному выше, в предыдущем параграфе, из рассмотрения ускоренного (точнее, замедленного) движения объектов в плоском пространстве. В соответствии со сказанным выше ограничимся везде поправками первого порядка по Δ. Распределение объектов по светимости характеризуем функцией

$$dn = n_1(t)\,W(L,\ t)\,dL. \tag{3.6.10}$$

Здесь t отсчитывается от сегодняшнего дня, так что в момент испускания $t=-R/c$, n_1 — общая плотность всех объектов в единице евклидова (не сопутствующего!) пространства. Предполагая, что источники (галактики) не возникают и не уничтожаются, примем, что [см. (3.5.2)]

$$n_1 = n_0(1-3Ht). \tag{3.6.11}$$

При этом учет эволюционного эффекта полностью связан с зависимостью W от времени. Наконец, видимая звездная величина (или, что то же, $\tilde{E}_1$) связана со светимостью L выражением, учитывающим влияние красного смещения [см. (3.4.19а)]:

$$\tilde{E}_1 = \mathrm{const}\cdot L\,\frac{(1-\Delta)^4}{R^2}, \tag{3.6.12}$$

$$\tilde{E}_1 = \mathrm{const}\cdot\frac{L}{R^2(1+z)^4}. \tag{3.6.12a}$$

Четвертая степень $(1-\Delta)$ получается при рассмотрении болометрической величины. На практике обычно измеряется энергия лишь в определенном интервале длин волн, к которым чувствителен приемник. При этом в формулу войдет $(1-\Delta)^\nu$ $(\nu=3-n)$, где спектральный поток можно приближенно описать формулой $F\sim\omega^n d\omega$ [см.

*) Последнее равно, очевидно, $n_0\int LW(L)\,dL$.

выше (3.3.16)] *). Выразив R через Δ (см. § 5 гл. 6), получим

$$\tilde{E}_1=\tilde{a}L\frac{(1-\Delta)^{\nu}}{\Delta^2\,[1-\Delta(1+\Omega'/2)]}, \qquad (3.6.13)$$

где $\tilde{a}$ — некоторая константа,

$$\tilde{E}_1=\tilde{a}L\,\frac{(1+z)^{3-\nu}}{z^2\left(1-\frac{\Omega'}{2}z\right)}. \qquad (3.6.13\text{a})$$

Поскольку весь расчет ведется с точностью до поправок порядка Δ, то

$$\tilde{E}_1=\tilde{a}L\frac{1}{\Delta^2}\left[1+\left(1+\frac{\Omega'}{2}-\nu\right)\Delta\right], \qquad (3.6.14)$$

$$\tilde{E}_1=\tilde{a}L\frac{1}{z^2}\left[1+\left(3+\frac{\Omega'}{2}-\nu\right)z\right], \qquad (3.6.14\text{a})$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}}\left[1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\Omega'}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}}\right], \qquad (3.6.15)$$

$$z=\sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}}\left[1+\left(\frac{3}{2}+\frac{\Omega'}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\frac{\tilde{a}L}{\tilde{E}_1}}\right]. \qquad (3.6.15\text{a})$$

Найдем число объектов, расположенных в слое с красным смещением от Δ до $\Delta+d\Delta$ и дающих поток света от $\tilde{E}_1$ до $\tilde{E}_1+d\tilde{E}_1$. Используя выражение (3.5.18), получим

$$d_2N=\text{const}\cdot n_0\Delta^2\,[1+\Delta\,(2-\Omega')]\,W\,(L,\,t)\left(\frac{\partial L}{\partial\tilde{E}_1}\right)_{\Delta}d\Delta\,d\tilde{E}_1, \qquad (3.6.16)$$

$$d_2N=\text{const}\cdot n_0z^2\,[1-(2+\Omega')\,z]\,W\,(L,\,t)\left(\frac{\partial L}{\partial\tilde{E}_1}\right)_{z}dz\,d\tilde{E}_1. \qquad (3.6.16\text{a})$$

Считая Δ, а значит, и $t=-\Delta/H$ малым, разложим $W\,(L,\,t)$ в ряд:

$$W\,(L,\,t)=W\,(L,\,0)-\frac{\Delta}{H}\,\dot{W}\,(L,\,0), \qquad (3.6.17)$$

где $\dot{W}=\frac{dW}{dt}$. Имея выражение (3.6.15) Δ через L и $\tilde{E}_1$, заменим $d\Delta$ на $\frac{d\Delta}{dL}$ и проведем интегрирование в (3.6.16) по dL при постоянном

*) Применяя формулу Планка, найдем, что для узкой спектральной полосы с $\hbar\omega/kT>3$ с хорошей точностью $n=3-\hbar\omega/kT$, $\nu=\hbar\omega/kT$, где $\hbar\omega$ — энергия кванта, k — постоянная Больцмана.

$\tilde{E}_1$. В результате получим

$$dN = \text{const}\cdot \tilde{E}_1^{-5/2}\, d\tilde{E}_1 \left\{ \int_0^\infty W(L,\ 0)\, L^{3/2} dL + \sqrt{\frac{a}{\tilde{E}_1}} \left[(4-2\nu) \int_0^\infty W(L,\ 0)\, L^2 dL - \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \dot{W}(L,\ 0)\, L^2 dL \right] \right\}. \tag{3.6.18}$$

Изучение близких галактик позволяет найти их распределение по светимостям $W(L, 0)$ для настоящего времени ($t=0$). Величина ν может быть найдена из распределения интенсивности в спектре источника и спектральной чувствительности регистрирующего прибора.

Формула (3.6.18) является решением поставленной проблемы: она описывает распределение объектов в зависимости от потока излучения от них $\tilde{E}_1$ (или, что то же, от их видимой звездной величины). Этот результат можно записать в других, более наглядных формах.

Мы уже раньше предполагали, что эволюционный эффект, т. е. изменение со временем функции $W(L, t)$, зависит не от рождения или исчезновения новых объектов, а исключительно от изменения их абсолютной величины.

Пусть светимость отдельного объекта в зависимости от времени подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = f(L,\ t) = k(L,\ t)\, L. \tag{3.6.19}$$

Функция f переписана через k для удобства дальнейшего использования.

Из (3.6.19), очевидно, следует:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial L} Wf. \tag{3.6.20}$$

Это уравнение выражает закон сохранения объектов, движущихся со скоростью f вдоль оси L.

Подставим выражение $\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t}$ в интеграл в формуле (3.6.18); интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^\infty \dot{W} L^2 dL = 2 \int_0^\infty Lf(L,\ 0)\, W(L,\ 0)\, dL. \tag{3.6.21}$$

Для частного случая одинаковых, синхронно эволюционирующих объектов можно написать

$$\begin{gathered} W(L,\ t)=\delta(L-L_0(t)), \\ \frac{dL_0}{dt}=f_0=kL_0. \end{gathered} \qquad (3.6.22)$$

Теперь из (3.6.18) находим

$$dN=\mathrm{const}\cdot\tilde{E}_1^{-5/2}\,d\tilde{E}_1L^{3/2}\left[1+\sqrt{\frac{\tilde{a}L_0}{\tilde{E}_1}}\left(4-2\nu-\frac{2k}{H_0}\right)\right]. \qquad (3.6.23)$$

Здесь $k=\frac{d\ln L_0}{dt}$ — величина, характеризующая эволюцию объектов. По всей вероятности, она отрицательна, как это следует из расчетов [см. Тинсли (1968, 1972), Тинсли и Спинард (1971), Сэндидж (1970), Спинард и Тейлор (1971)]. Константа k имеет размерность $сек^{-1}$, т. е. такую же, как и постоянная Хаббла H_0. Константа $\tilde{a}$ имеет размерность обратного квадрата расстояния, $\tilde{a}=\frac{H_0^2}{4\pi c^2}$, и корень в (3.6.23) можно написать в виде

$$\sqrt{\frac{\tilde{a}L_0}{\tilde{E}_1}}=\sqrt{\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_1}}, \qquad (3.6.24)$$

где $\tilde{E}_0=\tilde{a}L_0$ — это поток, который дал бы в точке наблюдения покоящийся источник L_0, находящийся на характерном расстоянии c/H_0 от приемника в евклидовом пространстве. Общую формулу (3.6.18) можно привести к виду, аналогичному (3.6.23).

Определим средневзвешенные по распределению величины $\bar{L}$ и $\bar{k}$ с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\bar{L}}&=\frac{\int\limits_0^\infty W(L,\ 0)\,L^2\,dL}{\int\limits_0^\infty W(L,\ 0)\,L^{3/2}\,dL}, \\ \bar{k}&=\frac{\int\limits_0^\infty \dot{W}(L,\ 0)\,W(L,\ 0)\,L^2\,dL}{\int\limits_0^\infty W(L,\ 0)\,L^2\,dL}=\frac{\int W\frac{dL}{dt}\,L\,dL}{\int WL^2\,dL}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6.25)$$

Определим, далее, $\bar{\tilde{E}}_0$ как поток от источника мощностью $\bar{L}$ на расстоянии c/H_0 в евклидовом пространстве:

$$\bar{\bar{E}}_0=\frac{\bar{L}}{4\pi(c/H_0)^2}.$$

Получим

$$dN=\mathrm{const}\cdot\tilde{E}_1^{-5/2}\,d\tilde{E}_1\left\{1+\sqrt{\frac{\bar{\bar{E}}_0}{\bar{\bar{E}}_1}}\left(4-2\nu-\frac{2\bar{k}}{H_0}\right)\right\}. \quad (3.6.26)$$

В этом виде и надо формулу сравнивать с наблюдениями.

Практически надо взять из наблюдений величину φ:

$$\varphi=\frac{dN}{\tilde{E}_1^{-5/2}\,d\tilde{E}_1}.$$

Тогда из (3.6.26) следует, что

$$\varphi=\varphi_0\left(1+S\sqrt{\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_1}}\right). \quad (3.6.27)$$

Откладывая φ на графике в зависимости от $1/\sqrt{\tilde{E}_1}$, определяем коэффициент

$$S=4-2\nu-\frac{2\bar{k}}{H_0}.$$

Наблюдатели зачастую искали эмпирическую зависимость вида

$$dN=\mathrm{const}\cdot\tilde{E}_1^{-5/2-\mu}\,d\tilde{E}_1=\mathrm{const}\cdot d\left(\tilde{E}_1^{-3/2-\mu}\right),$$

т. е. пытались учесть для интегральной величины N отступления от закона $^3/_2$ изменением показателя степени. Мак-Витти (1959б) показал, что должно быть $\mu=0$, и, действительно, формулы (3.6.26) и (3.6.27) показывают, что показатель степени $\tilde{E}_1$ измениться не может. При больших $\tilde{E}_1$, т. е. на близких расстояниях, всегда показатель равен $^3/_2$ для интегральной величины N и $^5/_2$ для дифференциальной $\frac{dN}{dE}$. Поправка носит характер разложения по степеням $\frac{1}{\sqrt{\tilde{E}_1}}$, т. е. величины, пропорциональной расстоянию. Выражения (3.6.26) и (3.6.27) (о значении ν см. примечание на стр. 89) могут быть полезны для обработки наблюдений.

Важнейшее качественное следствие проделанных расчетов заключается в том, что найденный выше первый член разложения по Δ не содержит плотности Ω' [соответствующая формула (137) и следующие формулы в обзоре Зельдовича (1965в) ошибочны].

Таким образом, исследования функции распределения объектов по видимой величине $N(\tilde{E}_1)$, относящейся к близким объектам, могут быть полезны для характеристики эволюции объектов в недалеком прошлом и для проверки основного предположения об однородном (хотя бы в среднем) распределении вещества в пространстве.