галактиками есть газ. Такая поправка нужна и в том случае, если сами $\theta$ и $\theta_1$ так малы, что не разрешаются телескопом.

При определении $q_0$ по кривой $m - z$ эффект неоднородности несколько занижает наблюдаемое значение $q_0$. Теоретические кривые с учетом этого эффекта дают большее $m$, а сравнение теории с наблюдениями дает большее $q_0$. Количественная оценка эффекта весьма затруднительна.

## § 11. Кинетическое уравнение для фотонов

До сих пор для расчета наблюдаемых величин мы рассматривали распространение света от отдельных источников к наблюдателю. Однако для многих целей важно знать среднюю плотность излучения в пространстве от всех источников и его спектральное распределение. Речь идет о средней плотности излучения вдали от отдельных источников.

К вопросу о средней плотности излучения от отдельных источников можно подойти совсем иначе, не рассматривая распространение света от них к наблюдателю. В однородной и изотропной Вселенной излучение также должно быть в среднем однородным и изотропным. Следовательно, его можно характеризовать функцией двух переменных — частоты $\omega$ и времени $t$. Число квантов в данном интервале частоты $d\omega$ в единице объема есть

$$dn = \varphi(\omega, t)\, d\omega; \tag{3.11.1}$$

соответственно плотность энергии, приходящейся на $d\omega$,

$$d\tilde{E}_1 = \hbar\omega\, dn = \hbar\omega\varphi(\omega, t)\, d\omega = \varepsilon_\nu(\omega, t)\, d\omega. \tag{3.11.2}$$

В изотропном поле излучения обмен квантами между соседними объемами, очевидно, ничего не меняет, поскольку их спектр и плотность в любом месте одинаковы. Следовательно, возможен локальный подход к вычислению функции $\varphi$.

Составим дифференциальное уравнение в частных производных для $\varphi(\omega, t)$. Это уравнение является частным случаем кинетического уравнения для функции распределения частиц по координатам и скоростям (или импульсам). Такое уравнение оказывается весьма сложным в общем случае с учетом кривизны пространства и времени, а также влияния рассеяния, поглощения и испускания рассматриваемых частиц. Однако уравнение и его вывод становятся простыми для частного случая, когда метрика пространства-времени соответствует однородной и изотропной модели и частицы (в данном случае фотоны) также распределены в пространстве однородно, а в каждой точке скорости их изотропно распределены по направлениям. Из общих соображений ясно, что если в какой-то момент распределение обладает этими свойствами, то они не нарушатся и позже, так что все время можно рассматривать функцию двух переменных $\varphi(\omega, t)$ вместо функции семи *) переменных $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t$ или $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \omega, t$.

Далее, очевидно, что в изотропном случае рассеяние без изменения частоты не входит в уравнение. Пренебрежем сначала также поглощением и испусканием фотонов и будем учитывать только красное смещение.

Рассмотрим группу $dN$ фотонов, находящихся в сопутствующем объеме $V$ в интервале частот $d\omega$:

$$dN = V\varphi\, d\omega.$$

В ходе расширения число $dN$ остается неизменным, если нет ни поглощения, ни испускания. Однако мы должны учесть изменение $V$ и $\omega$. По общим правилам дифференциального исчисления имеем

$$\frac{dN}{dt} = 0 = \frac{d(V\varphi\, d\omega)}{dt} = \frac{\partial(V\varphi\, d\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(V\varphi\, d\omega)}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dt}.$$

При этом

$$\frac{dV}{dt} = 3HV, \qquad \frac{d\omega}{dt} = -H\omega.$$

Подставляя, получим уравнение **)

$$Vd\ln\omega\frac{\partial(\varphi\omega)}{\partial t} + 3HV\varphi\omega\, d\ln\omega - H\omega Vd\ln\omega\frac{\partial(\varphi\omega)}{\partial\omega} = 0,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2H\varphi - H\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = 0. \qquad (3.11.3)$$

Это уравнение упрощается, если ввести число заполнения фотонов $n$. Число заполнения определяется как отношение числа фотонов в данном элементе объема и интервале частоты (в общем случае — и в элементе телесного угла $\Omega^*$) к числу отдельных собственных колебаний (их называют модами) электромагнитного поля. Число таких мод есть

$$d\mu = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}V\, dp_x\, dp_y\, dp_z = \frac{2Vp^2\, dp\, d\Omega^*}{(2\pi\hbar)^3}.$$

В избранном случае, интегрируя по углу $\left(\int d\Omega^* = 4\pi\right)$, имеем

$$d\mu = \frac{V\omega^2\, d\omega}{\pi^2 c^3} = \frac{8\pi}{3}d\left(\frac{V}{\lambda^3}\right).$$

*) Вектор положения $\boldsymbol{r}$ — три переменные, так же как и импульс $\boldsymbol{p}$: единичный вектор направления $\boldsymbol{n}$ соответствует двум переменным, так как $\boldsymbol{p} = \hbar\omega\boldsymbol{n}/c$.

**) Удобно записать $d\omega = \omega\, d\ln\omega$, так как $d\ln\omega$, очевидно, не изменяется под действием красного смещения.

Итак, число заполнения $n$ в изотропном случае определяется как

$$n=\frac{dN}{d\mu}=\frac{\pi^2c^3\varphi}{\omega^2}. \tag{3.11.4}$$

Каждую моду электромагнитных колебаний можно рассматривать как отдельный резонатор. При этом $n$ есть номер возбужденного состояния этого резонатора; энергия резонатора может изменяться на целые кванты $\hbar\omega$, число заполнения $n$ соответствует энергии $n\hbar\omega$.

Отметим (это недостаточно хорошо известно астрономам), что число $n$ играет огромную роль во всей физике излучения: индуцированное (стимулированное) излучение в лазере отличается от спонтанного излучения множителем $(n+1)$. В термодинамически равновесном излучении

$$n=(e^{\hbar\omega/kT}-1)^{-1}$$

(формула Планка). При сплошном спектре $n$ статистически распределено по соседним модам и мы в действительности везде подразумеваем среднее значение $n$.

В ходе медленного расширения следует ожидать, что $n$ сохраняется как адиабатический инвариант. И действительно, если в уравнение (3.11.3) подставить из (3.11.4) $\varphi=\frac{n\omega^2}{\pi^2c^3}$, получим

$$\frac{\partial n}{\partial t}-H\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}=\left.\frac{dn}{dt}\right|_c=0, \tag{3.11.5}$$

где $\left.\frac{d}{dt}\right|_c$ берется вдоль характеристики, т. е. при условии

$$d\omega=-H\omega\,dt.$$

Итак, макроскопическое кинетическое уравнение согласуется с квантовыми представлениями о числе фотонов на моду и о номере квантового состояния, сохраняющихся в ходе расширения.

Вернемся к уравнению для $\varphi$. Добавляя в (3.11.3) вклад источников $I(\omega,\ t)$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-2H\varphi+H\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+I(\omega,\ t). \tag{3.11.6}$$

Уравнение для спектральной плотности $\varepsilon_\nu(\omega,\ t)$ [см. формулу (3.11.2)] получим отсюда элементарной выкладкой:

$$\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial t}=-3H\varepsilon_\nu+H\omega\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\omega}+\Phi(\omega,\ t)=$$
$$=-4H\varepsilon_\nu+H\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_\nu\omega+\Phi(\omega,\ t). \tag{3.11.7}$$

Здесь $I(\omega,\ t)$ и $\Phi(\omega,\ t)=\hbar\omega I(\omega,\ t)$ — число квантов и энергия этих квантов, испускаемых звездами, находящимися в единице объема, за единицу времени и в единице частоты. По существу, ясно, что уравнение в частных производных (3.11.7) и метод сложения света, приходящего из разных слоев, равноценны и эквивалентны. Локальный подход, т. е. уравнение (3.11.7), полезен для выяснения общих свойств решения задачи о средней плотности излучения. Так, например, сразу видно, что рассеяние света (без поглощения и без изменения частоты) никак не влияет на спектр — изотропное поле излучения после рассеяния остается изотропным.

Для общей плотности энергии $\varepsilon$ получим, интегрируя (3.11.7) по $\omega$, уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -4H\varepsilon(t) + Q(t), \tag{3.11.8}$$

где

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\nu(\omega, t)\, d\omega, \qquad Q = \int_0^\infty \Phi(\omega, t)\, d\omega.$$

Из уравнения (3.11.7) видно, что к данному решению этого уравнения с источниками света [т. е. с членом $\Phi(\omega, t)$] всегда можно прибавить решение однородного уравнения (без $\Phi$, т. е. без источников). Таким решением является, в частности, планковское распределение

$$\varepsilon_\nu(\omega, t) = \mathrm{const}\cdot\frac{\omega^3\, d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \tag{3.11.9}$$

с температурой $T$, зависящей от времени по закону

$$\frac{dT}{dt} = -HT. \tag{3.11.10}$$

Это утверждение легко проверить подстановкой (3.11.9) в (3.11.7) при $\Phi=0$. Такой планковский спектр, полностью равновесный, т. е. с коэффициентом дилюции, равным 1, и с $T_{пл}=2°,7$, наблюдается в настоящее время как следствие высокой температуры вещества на ранних этапах расширения (см. раздел II) *). Грубую оценку плотности энергии одних источников излучения без учета излучения горячей модели можно получить из уравнения (3.11.8), полагая, что решение является квазистационарным, т. е. пренебрегая членом с $\frac{d}{dt}$.

---

*) Из уравнения в характеристиках для $n$ ясно, что любая функция, подобно сжимающаяся по оси частот, является решением уравнения без источников, т. е.

$$n = n\left(\frac{\omega}{\psi(t)}\right), \qquad \psi = e^{-\int H\, dt}, \qquad \frac{d\psi}{dt} = -H\psi, \qquad \psi \sim (1+z)^{-1}.$$

Для любой функции т. е. любого вида спектра, полная плотность фотонов $\int n\omega^2\, d\omega$ меняется пропорционально $(1+z)^{-3}$, а плотность энергии меняется пропорционально $(1+z)^{-4}$.

Получим

$$-4H\varepsilon + Q = 0; \qquad \varepsilon = \frac{Q}{4H}. \tag{3.11.11}$$

Аналогично в уравнении для спектральной плотности самое грубое приближение состоит в вычеркивании $\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial t}$ и $\frac{\partial (\varepsilon_\nu \omega)}{\partial \omega}$. Получим

$$\varepsilon_\nu = \frac{\Phi}{4H}. \tag{3.11.12}$$

Можно уточнить спектр: пренебрегая $\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial t}$, но оставляя член $\frac{\partial (\varepsilon_\nu \omega)}{\partial \omega}$, получим

$$\varepsilon_\nu(\omega, t) = \frac{1}{H}\omega^3 \int_\omega^\infty \frac{\Phi(\omega', t)}{\omega'} d\omega'. \tag{3.11.13}$$

В стационарном приближении легко также построить решение при наличии в межгалактическом пространстве пыли, поглощающей свет звезд, нагревающейся при этом и испускающей свой тепловой спектр. Здесь, однако, мы на этом не останавливаемся.

Линейное дифференциальное уравнение для плотности излучения

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -4H(t)\,\varepsilon(t) + Q(t)$$

может быть решено точно. Ответ можно записать в виде квадратуры (определенного интеграла) при заданной функции $Q(t)$. При этом функция $Q(t)$ сама войдет в ответ линейно, что отвечает физическому смыслу задачи: плотность излучения в данный момент $t_0$ является суммой вкладов $Q(\tau)d\tau$ излучения за каждый малый интервал времени от $\tau$ до $\tau + d\tau$, где $\tau < t$. Каждый такой вклад преобразуется в ходе расширения от момента $\tau$ до момента $t_0$.

Если выделить таким образом вклад источника $Q$ за конечное время от $t_1$ до $t_0$, то нужно еще добавить вклад плотности энергии, которая уже имелась в момент $t_1$.

Легко проверить, что выражение

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0) = \\ = \int_{t_1}^{t_0} Q(\tau)\exp\left[-4\int_\tau^{t_0} H(\theta)d\theta\right]d\tau + \varepsilon(t_1)\exp\left[-4\int_{t_1}^{t_0} H(\theta)\,d\theta\right],$$

соответствующее этим идеям, действительно точно удовлетворяет уравнению. Для четкости переменные интегрирования и пределы обозначены разными буквами ($t_0$, $t_1$, $\tau$, $\theta$).

Экспоненты с интегралами имеют очень простой смысл. Так как $H(t)=\frac{1}{a(t)}\frac{da}{dt}$, где $a$ есть радиус мира, то

$$\int_\tau^{t_0} H(\theta)\,d\theta=\ln\frac{a(t_0)}{a(\theta)}, \qquad \exp\left[-4\int_t^{t_0} H(\theta)\,d\theta\right]=\left[\frac{a(\tau)}{a(t_0)}\right]^4.$$

Плотность энергии, испущенной в момент $\tau$ за время от $\tau$ до $t_0$, падает, как четвертая степень радиуса или как $V^{-4/3}$, где $V$ — объем, в полном соответствии с термодинамикой излучения. Отношение радиусов в моменты $\tau$ и $t_0$ связано с величиной красного смещения:

$$\frac{a(\tau)}{a(t_0)}=1-\Delta(\tau)=\frac{1}{1+z(\tau)}.$$

Удобно перейти к $\Delta$ или $z$ в качестве переменной интегрирования. При этом воспользуемся выражением (3.3.35), связывающим дифференциалы $dt$ и $d\Delta$ или $dz$. Получим

$$\varepsilon_0=\int_0^{\Delta_1} Q(\Delta)(1-\Delta)^4\sqrt{\frac{1-\Delta}{1-\Delta\Omega}}\,d\Delta+\varepsilon_1(1-\Delta_1)^4=$$

$$=\int_0^{z_1} Q(z)(1+z)^{-4}\frac{1}{(1+z)^2\sqrt{1+\Omega z}}\,dz+\varepsilon_1(1+z_1)^{-4}.$$

Напомним, что $Q$ есть мгновенная мощность излучения в единице физического пространства. Если же ввести мощность излучения, отнесенную к единице массы $q^*$, то нужно будет учесть, что $Q=q^*\rho$, а также

$$\rho=\rho_0(1+z)^3=\rho_0(1-\Delta)^3,$$

т. е.

$$Q=q^*\rho_0(1+z)^3=q^*\rho_0(1-\Delta)^{-3}.$$

Иногда вводят еще $Q_s$ — мощность излучения, отнесенную к единице сопутствующего пространства, причем определяют эту единицу так, чтобы она к настоящему времени $t_0$ совпадала с физической единицей объема 1 $см^3$.

Очевидно, что $Q_s=Q(1+z)^{-3}=Q(1-\Delta)^3$. Соответственно

$$\varepsilon_0=\int_0^{\Delta_1} Q_s(\Delta)(1-\Delta)\sqrt{\frac{1-\Delta}{1-\Delta\Omega}}\,d\Delta+\varepsilon_1(1-\Delta_1)^4=$$

$$=\int_0^{z_1} Q_s(z)(1+z)^{-1}\frac{1}{(1+z)^2\sqrt{1+\Omega z}}\,dz+\varepsilon_1(1+z_1)^{-4}.$$

Предположение о том, что $Q$, $Q_s$, $q^*$ зависят непосредственно именно от $z$ или $\Delta$, а не от $t$ и эта зависимость выражается простыми формулами, является вполне естественным, так как $z$ и $\Delta$ прямо связаны с плотностью вещества во Вселенной. Так, например, в наиболее простом предположении об отсутствии эволюции считают $q^*=\text{const}$, $Q_s=\text{const}$, $Q\sim(1+z)^3\sim(1-\Delta)^{-3}$. В этом случае интеграл сходится, даже если распространить его до горизонта ($\Delta=0$, $z=\infty$). Именно это имеют в виду, когда говорят, что в теории расширяющейся Вселенной нет фотометрического парадокса [см., например, Ландау, Лифшиц (1973)].

Рассмотрим другой пример. Пусть Метагалактика заполнена ионизованной плазмой. Мощность ее излучения $Q\sim n^2T^{1/2}$, где $T$ — температура. При постоянной температуре $Q\sim(1+z)^6\sim(1-\Delta)^{-6}$, интеграл расходится у горизонта *).

В горячей модели Вселенной как раз и предполагается, что на ранней, дозвездной стадии вещество находится в состоянии полностью ионизованной, однородно распределенной плазмы. При этом определенная плотность излучения получается, очевидно, за счет того, что при высокой плотности имеет место термодинамическое равновесие между плазмой и излучением. Это значит, что излучение уравновешено поглощением света, которое не учитывалось выше. Впоследствии вещество стало нейтральным, оно перестало взаимодействовать со светом (см. следующий раздел), фотонный «газ» расширяется без взаимодействия с веществом. Вклад в среднюю плотность излучения от этой ранней стадии как раз и представляет собой планковский спектр, соответствующий 2,7 °К, о нем подробно говорится в следующем разделе.

Рассеяние, как уже отмечалось, не играет роли, если при этом не меняется частота и энергия света.

Для спектральной плотности $\varepsilon_\nu$ имеет место уравнение (3.11.7) в частных производных. Это уравнение можно решить тем же методом, переходя к $\Delta$ или $z$ в качестве переменной [Дорошкевич, Новиков (1964)]. В формальной теории закон изменения частоты в ходе красного смещения дает уравнение характеристик для уравнения в частных производных.

Решение для $\varepsilon_\nu$ было приведено выше [см. (3.8.3)] в связи с конкретным анализом спектра в области радиочастот. Там было показано, как с помощью $\frac{dt}{dz}$ может быть записана в удобном виде оптическая толща для рассеяния света [см. (3.8.1)]. В этом же параграфе

---

*) Если учесть рост температуры с ростом плотности, расходимость только усилится. В области высоких температур, где $P\approx\varepsilon/3$, меняется выражение $dt$ через $dz$ или $d\Delta$, что, однако, качественно не меняет все приводимые ниже выводы.

(§ 8) говорилось также о способе расчета средней плотности излучения. Обзор наблюдательных данных, а также некоторые конкретные результаты расчетов, выполненных с использованием формул данного параграфа, приведены в §§ 2 и 3 гл. 5.

## § 12. Однозначно ли объяснение красного смещения расширением Вселенной?

Идея стационарности Вселенной, как показывает исторический опыт, обладает большой привлекательностью, основанной, вероятно, на инерции мышления. Человек привык к малым скоростям. В пределах жизни человека и даже человечества не происходило заметных изменений в большинстве космических систем. Поэтому, когда появилось наблюдательное доказательство красного смещения спектральных линий, последовал ряд попыток дать объяснение смещения линий, отличное от доплер-эффекта. Многие авторы хотели бы избежать представления о доплер-эффекте и взаимном удалении галактик. Уж очень грандиозна картина расширяющейся Вселенной. Казалось гораздо привычнее и «спокойнее» представление о неэволюционирующей Вселенной. Отсюда многочисленные попытки отстоять стационарность Вселенной, дать какое-то иное объяснение «красному космологическому смещению». К сожалению, подобные попытки встречаются иногда еще и сегодня.

В этих объяснениях используется тот факт, что смещение именно красное. Если $\rho > \rho_c$, то через $10^{10}$ *лет* красное смещение сменится фиолетовым; тогда эти объяснения отпадут автоматически. Но сейчас во всяком случае $H > 0$, смещение спектральных линий соответствует уменьшению энергии кванта, т. е. потере квантом части энергии на пути от далеких объектов до земного наблюдателя.

В связи с этим возникает вопрос: насколько однозначна интерпретация красного смещения как эффекта Доплера? Не может ли другая физическая причина вести к покраснению квантов света — фотонов? Первый вариант попытки объяснения основан на гравитационном красном смещении ОТО. В ОТО известно, что световые кванты краснеют, когда они распространяются из области большего гравитационного потенциала к меньшему. Например, краснеют кванты, идущие снизу вверх, у поверхности Земли. Этот эффект измерен в лаборатории. Кванты, движущиеся сверху вниз, становятся более фиолетовыми.

Однако эффект покраснения квантов в сильном поле тяготения никак не может объяснить космологическое красное смещение. Это ясно из рассмотрения, проведенного в § 5 этой главы. Во-первых, эффект чрезвычайно слаб в однородной Вселенной при современной плотности. Во-вторых, смещение пропорционально квадрату расстояния, а не первой степени, как это имеет место в законе Хаббла, и, в-третьих, самое важное, имеет другой знак — смещение