

против такого объяснения \*). Знание основных свойств теории с  $\Lambda \neq 0$  стало необходимым уже для того, чтобы понимать статьи, публикуемые в журналах. Мы считаем целесообразным привести здесь основные формулы, касающиеся однородных изотропных моделей с  $\Lambda$ -членом [см. также Зельдович (1967)]. Во всей остальной книге мы считаем  $\Lambda = 0$ .

## § 2. Космологические модели с $\Lambda$ -членом

Уравнения Эйнштейна при введении  $\Lambda$ -члена имеют следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik} + g_{ik} \Lambda$$

(обозначения см. § 1 гл. 2). Из этого выражения мы видим, что новый член эквивалентен дополнительному члену в тензоре энергии-импульса. Этот член дает плотность энергии

$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \quad (4.2.1)$$

и давление

$$P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}. \quad (4.2.2)$$

Можно ввести также плотность массы

$$\rho_\Lambda = \frac{\epsilon_\Lambda}{c^2} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (4.2.3)$$

Введенные величины не зависят от плотности частиц, поэтому можно говорить о  $\rho_\Lambda$ ,  $\epsilon_\Lambda$  и  $P_\Lambda$  как о плотности массы, плотности энергии и давлении пустого пространства, вакуума. Мы проанализируем влияние этих величин на поведение Вселенной в ньютоновской манере, как в гл. 1. Такой анализ позволит объяснить также, почему Эйнштейн назвал  $\Lambda$  «космологической» постоянной.

При этом, однако, будет учтено, что в уравнение для ускорения входит  $\epsilon + 3P$  [см. (1.6.2) и (2.1.8)], так что при  $\Lambda \neq 0$  в уравнение войдет комбинация

$$\epsilon_\Lambda + 3P_\Lambda = \epsilon_\Lambda - 3\epsilon_\Lambda = -2\epsilon_\Lambda = -\frac{c^4 \Lambda}{4\pi G}.$$

Далее, уравнение (1.6.5) для «кинетической энергии» будет написано сразу с тем значением константы, которое следует из ОТО [см. уравнение (2.1.9)], когда масштабный фактор выбран как радиус мира:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3c^2} a^2 (\epsilon + \epsilon_\Lambda) - \frac{kc^2}{2}. \quad (4.2.4)$$

\*) В этой же связи дискутировался и вопрос о соотношении ОТО (и, в частности, космологической постоянной) и теории элементарных частиц. Этот круг вопросов рассмотрен в ТТ и ЭЗ. В свете новых физических теорий мы коснемся этих вопросов в гл. 23.

При этом  $k=-1$  для гиперболической метрики [формула (2.3.2), открытый мир],  $k=1$  для сферической метрики [формула (2.2.6), замкнутый мир] и  $k=0$  для плоского евклидова мира [формула (2.5.2), где мы условились писать  $b$  вместо  $a$ ]. Здесь  $\epsilon$  и  $P$  без индексов относятся к обычной материи: звездам, межгалактическому газу, излучению; очевидно, что  $\epsilon > 0$ ,  $P > 0$ .

Отметим, что с трактовкой  $\epsilon_\Lambda$  и  $P_\Lambda$  как плотности энергии и давления вакуума полностью согласуется тот факт, что эти величины удовлетворяют закону сохранения энергии (первому началу термодинамики) в форме  $dE_\Lambda = d(\epsilon_\Lambda V) = -P_\Lambda dV$ , причем  $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = \text{const}$ . Как отмечено в ТТ и ЭЗ, значения  $\epsilon_\Lambda$  и  $P_\Lambda$  к тому же и лоренц-инвариантны, одинаковы во всех движущихся друг относительно друга координатных системах.

Вместо (2.1.8) и (2.1.9) мы теперь имеем

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2} a (\epsilon + 3P + \epsilon_\Lambda + 3P_\Lambda) = -\frac{4\pi G}{3c^2} a (\epsilon + 3P - 2\epsilon_\Lambda), \quad (4.2.5)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3c^2} a^2 (\epsilon + \epsilon_\Lambda) - \frac{kc^2}{2}. \quad (4.2.6)$$

Наиболее важное свойство новых уравнений — возможность статического решения: если

$$\epsilon_\Lambda = \frac{\epsilon + 3P}{2}, \quad k = 1 = \frac{4\pi G}{c^4} a^2 (\epsilon + P), \quad (4.2.7)$$

то из (4.2.5) и (4.2.6) следует:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad a = \text{const}. \quad (4.2.8)$$

Заметим, что статического решения не существует без космологического члена, так как материя имеет  $\epsilon > 0$ ,  $P > 0$ , что, согласно (4.2.5), несовместимо с  $\frac{d^2 a}{dt^2} = 0$ . В случае  $\Lambda \neq 0$  статическое решение получается благодаря отрицательному давлению  $P_\Lambda$ , которое превосходит положительное  $\epsilon_\Lambda$  в выражении  $\epsilon_\Lambda + 3P_\Lambda = \epsilon_\Lambda - 3\epsilon_\Lambda = -2\epsilon_\Lambda$ . Далее, очевидно, что статическое решение должно быть замкнутым: условие  $\frac{d^2 a}{dt^2} = 0$  дает  $\epsilon + 3P - 2\epsilon_\Lambda = 0$ , откуда  $\epsilon + \epsilon_\Lambda$  — величина в правой части уравнения (4.2.6) — получится определенно положительной,  $\epsilon + \epsilon_\Lambda = \epsilon + \frac{\epsilon + 3P}{2} = \frac{3}{2}(\epsilon + P)$ . [Предлагаемая трактовка близко следует Бонди (1961).] Следовательно, если  $\left( \frac{da}{dt} \right)^2 = 0$ , то  $k=1$ , мир замкнут. Радиус его выражается через плотность и давление вещества. Такое решение, называемое космологической моделью Эйнштейна, реализует пожелания Эйнштейна — замкнутость и статичность Вселенной.

Обратимся к космологической модели с  $\Lambda \neq 0$ , предложенной недавно в связи с исследованием квазаров. Сначала Петросян, Солпитер и Шекерс (1967) ввели  $\Lambda$ , чтобы объяснить соотношение красное смещение — видимая величина для квазаров. Вскоре после этого Шкловский (1967) и Кардашев (1967) предложили космологическую модель с  $\Lambda$ , выбранной так, чтобы расширение имело длительную задержку на определенном радиусе. Одно время казалось, что имеются указания на концентрацию квазаров при определенном красном смещении  $z=1,95$ ; возможное объяснение заключается в том, что это смещение достигается при радиусе  $a$ , когда приближенно выполнены соотношения (4.2.7) и Вселенная длительно почти не расширяется. Таким образом, предлагается модель, которая в течение длительного времени весьма близка к статической модели Эйнштейна; следовательно, модель является замкнутой. Оказывается, что условие «плато» для функции  $a(t)$  при определенном  $z=1,95$  и сегодняшнее значение постоянной Хаббла  $H_0$  полностью определяют основные свойства модели. Значит,  $a_{\text{задержки}} = a_0/1,95$ . Связь между радиусом и красным смещением  $a_0/a = 1+z$ , полученная нами в гл. 3, сохраняется, очевидно, и при наличии  $\Lambda \neq 0$ . Ниже полагаем, что можно пренебречь давлением материи (в том числе давлением излучения, входящего в состав материи). Тогда плотность материи на время задержки  $\rho' = \rho_0(1+z)^3$ . После этого из (4.2.7) легко найдем основные характеристики модели.

$$\text{Расчет дает (полагаем } H_0 = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс, } \rho_c = 10^{-29} \text{ г/см}^3) \\ \rho_\Lambda = 1,3 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3, \quad \epsilon_\Lambda = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ эрг/см}^3, \quad \Lambda = 2,6 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}. \quad (4.2.9)$$

Плотность обычной материи в этой модели в настоящее время  $\rho_0 = 10^{-30} \text{ г/см}^3$ , радиус мира  $a = 2 \cdot 10^{28} \text{ см}$ ; на плато  $\rho' = (1+1,95)^3 \rho_0 = 2,5 \cdot 10^{-28} \text{ г/см}^3$ ,  $a' = \frac{a_0}{1+1,95} = 0,75 \cdot 10^{28} \text{ см}$ . Длительность пребывания на плато можно принять любой. Эта длительность пропорциональна  $\ln \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_0'}$  или  $\ln \frac{\Lambda}{\Lambda'' - \Lambda}$ , где величины с двумя штрихами суть значения параметров, дающие строго статическую модель. Кардашев принимает длительность порядка  $7 \cdot 10^{10} \text{ лет}$ , для чего нужно  $\frac{\rho_0 - \rho_0''}{\rho_0}$  порядка  $10^{-4}$ . Замкнутый мир с длительной задержкой расширения обладает своеобразной особенностью: за время задержки световой (или радио-) луч успевает несколько раз обойти всю Вселенную. За время, равное  $\frac{\pi a'}{c} = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ сек}$ , луч приходит от антицентра, т. е. от точки, где  $r = \pi$  в метрике  $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[dr^2 + \sin^2 r (d^2\theta + \sin^2\theta d\varphi^2)]$ . За вдвое большее время луч обходит весь мир и возвращается в точку испускания. Формально при  $r = \pi$  и  $r = 0$  происхо-

дит фокусировка лучей, угловое и болометрическое расстояния обращаются в нуль, поток энергии, принимаемый нами, сильно зависит от того, имеется ли близко от антиполюса (случайно) источник излучения (то же относится к источнику в далеком прошлом в том месте, где сейчас находится Галактика и где выбрано начало системы координат). В ряде работ обсуждаются причины, нарушающие точную фокусировку лучей, характерную для строго однородной и изотропной модели. Наблюдения не подтверждают фокусировки лучей. В целом концепция космологической модели с  $\Lambda \neq 0$  и плато для  $a(t)$  при  $z=1,95$  в настоящее время в значительной мере утратила свою привлекательность.

Теперь рассмотрим общую постановку задачи о динамике и геометрии моделей с  $\Lambda \neq 0$  с тем, чтобы классифицировать все типы решений. Для удобства сравнения с наблюдениями (реальными или будущими) предположим, что известны современные значения постоянной Хаббла  $H_0$  и плотности вещества  $\rho_0$ ; давлением вещества пренебрегаем. Пусть, далее, известна  $\rho_\Lambda$  или связанное с ней согласно уравнению (4.2.5) значение ускорения.

Характер решения уравнений (4.2.5), (4.2.6) зависит только от безразмерных величин; снова введем безразмерную плотность  $\Omega$  и безразмерное ускорение  $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ . До тех пор, пока рассматривалась теория с  $\Lambda=0$  при  $P=0$ , величины  $q_0=q(t_0)$  и  $\Omega$  были синонимами:  $q_0 = \frac{\Omega}{2}$ . Однако при  $\Lambda \neq 0$  из (4.2.5) найдем  $q_0 = \frac{\Omega}{2} - \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3H_0^2}$ , так что разность  $\lambda \equiv \frac{\Omega}{2} - q_0 = \frac{\rho_\Lambda 8\pi G}{3H_0^2}$  характеризует  $\Lambda$ ; величина  $\lambda$  есть безразмерная (отнесенная к  $\rho_c$ ) плотность, соответствующая космологической постоянной, т. е.

$$\lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}.$$

Введем еще параметры  $x = \frac{1}{1+z} = \frac{a(t)}{a_0}$ ,  $\tau = tH_0$ , а также  $\alpha = a_0 \frac{H_0}{c}$  — безразмерный радиус мира в настоящий момент. Уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G a^2}{3} (\rho + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{2} \quad (4.2.10)$$

преобразуем, деля на  $H_0^2 a_0^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{da}{a_0 H_0 dt} \right)^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3H_0^2} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 \left[ \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_\Lambda \right] - \frac{k}{2} \left( \frac{c}{a_0 H_0} \right)^2 = \\ &= x^2 \left[ \frac{\Omega}{2} \frac{1}{x^3} + \frac{\lambda}{2} \right] - \frac{k}{2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Полученное уравнение имеет вид закона сохранения энергии для движения материальной точки с координатой  $x$  в зависимости от времени  $\tau$  в потенциале, зависящем от  $x$ . Уравнение можно преобразовать, вводя  $q_0$  вместо  $\lambda$  и учитывая, что  $H_0$  характеризует скорость расширения в настоящий момент, когда  $x=1, \frac{da}{dt} \Big|_{a=a_0} = H_0 a_0$ , откуда следует, что  $\frac{dx}{d\tau} = 1$  при  $x=1$ . Благодаря этому константа  $\alpha^{-2}$  не является независимой, а выражается из (4.2.11) через  $\Omega$  и  $\lambda$  или  $\Omega$  и  $q_0$ . Окончательно получим

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{\Omega}{x} + \lambda x^2 + 1 - \Omega - \lambda = \frac{\Omega}{x} + \left(\frac{\Omega}{2} - q_0\right) x^2 + 1 + q_0 - \frac{3}{2} \Omega. \quad (4.2.12)$$

В таком виде уравнение применимо ко всем трем вариантам геометрии (замкнутый, гиперболический, плоский мир). Решения, описывающие нашу Вселенную, проходят через точку  $x=1$ . Для получения всех детальных сведений о зависимости яркости и числа галактик от красного смещения нужно было бы интегрировать уравнение (4.2.12), а затем и уравнение распространения лучей:  $ds=0, c dt=a(t)dr$ . Это и было сделано в ряде работ; см., например, Стейбелл и Рефсдал (1966). Получающиеся зависимости довольно сложны, особенно когда происходит многократное обегание Вселенной световыми лучами. Здесь, однако, можно ограничиться исследованием общего характера эволюции. Для этого достаточно построить кривые  $f(x)$ , где  $f(x)$  — правая часть выражения (4.2.12). Если  $f(x) > 0$  в интервале  $0 < x < 1$ , то движение от  $x=0, \tau=0$  до  $x=1, \tau=\tau_1$  происходило монотонно, в прошлом имела место сингулярность, эволюция качественно подобна эволюции мира с  $\Lambda=0$ , для которого функция  $f(x) = \frac{\Omega}{x} + 1 - \Omega$  и удовлетворяет условию  $f(x) > 0$  при  $x < 1$ . Назовем такую ситуацию вариантом I. Возможен, однако, и случай, когда в области  $x_1 < x < x_2$   $f(x) < 0$ . Это значит, что указанная область запрещена (энергетический барьер).

В этом случае в прошлом радиус Вселенной был бесконечен, Вселенная сначала сжималась от  $x=\infty$  до определенного  $x_2$ , а затем расширилась от  $x_2$  (отражение частицы от энергетического барьера) и в настоящее время находится в фазе расширения.

Такая ситуация (назовем ее вариантом II) вряд ли годится для описания нашей Вселенной: в ней нет сингулярности, нет периода большой плотности вещества. Между тем именно в период большой плотности естественно возникает равновесный спектр излучения (реликтовое излучение, РИ, см. далее); в варианте II спектр РИ необъясним \*).

\* Чтобы остановка происходила при большой плотности, когда мог бы установиться равновесный спектр РИ, понадобилось бы большое значение  $\Lambda$ , несовместимое с наблюдениями.

Аналогично можно рассмотреть и будущее Вселенной. Оно зависит от поведения  $f(x)$  при  $x > 1$ . Если  $f(x) > 0$  при  $x > 1$ , то имеет место неограниченное расширение (вариант III). Если  $f(x) = 0$  при некотором  $x_3 > 1$ , то сегодняшнее состояние,  $x = 1, \frac{dx}{dt} = 1$ , приведет к расширению до  $x = x_3$ , которое затем сменится сжатием, причем сжатие дойдет до сингулярности,  $x = 0$  (вариант IV).

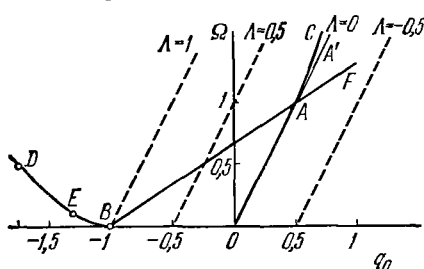


Рис. 24. Диаграмма  $q_0$ — $\Omega$  для космологических моделей с различными значениями  $\Lambda$ .

считается пренебрежимо малым,  $q_0$  может быть и положительным, и отрицательным.

Линия  $OAA'$  соответствует  $\Lambda = 0$  — случаю, подробно рассмотренному ранее. Параллельные ей пунктирные линии соответствуют  $\Lambda = \text{const}$ :  $\Lambda > 0$  слева от  $OAA'$  и  $\Lambda < 0$  справа от  $OAA'$ . Линия  $BAF$  соответствует трехмерному плоскому миру ( $k=0$ ), ее уравнение

$$\Omega = \frac{2}{3} (1 + q_0). \quad (4.2.13)$$

Эта линия отделяет решения, соответствующие замкнутому миру (левее  $BAF$ ), от решений для открытого мира (правее  $BAF$ ).

Обратимся к различным типам эволюции. Линия  $BED$  отделяет два типа прошлого: правее  $BED$  (I) и левее  $BED$  (II). Модель Кардашева с длительной задержкой весьма близка к точке  $E$  (но чуть выше и правее). Наконец, линия  $OAC$  разделяет два типа будущего: левее  $OAC$  уравнения предсказывают неограниченное расширение — вариант III, правее  $OAC$  — вариант IV. В моделях без  $\Lambda$ -члена будущее и геометрический тип были связаны однозначно: замкнутый мир эволюционировал по типу IV, плоский или открытый — по типу III. Как видно из рис. 24, эта связь не имеет места в случае  $\Lambda \neq 0$ . Здесь имеется область, для которой мир геометрически (трехмерно) замкнут и тем не менее ему предстоит неограниченное расширение. В другой области, напротив, гиперболическому миру предстоит остановка и переход от расширения к сжатию в будущем.

Отметим в заключение любопытное частное решение, соответствующее точке  $B$ , — плоский мир без материи, с метрикой,

имеющей вид

$$ds^2 = c^2 dt - e^{2H_0 t} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

для чего нужно  $\lambda=1$ ,  $\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} = 2 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ . Это — метрика так называемой стационарной Вселенной.

В этом варианте расширение происходит неограниченно во времени и в прошлом, и в будущем, мир не статичен, но стационарен в том смысле, что все его локальные свойства не зависят от времени \*). Буквально это решение неприменимо ко Вселенной с материей (когда  $\Omega \neq 0$ ,  $\rho \neq 0$ ), но оно вдохновляло некоторые попытки описания вечной стационарной Вселенной, которые, несмотря на отрицательное отношение к ним, мы рассмотрим позже, в разделе V.

---

\*) Формально, прибавляя к  $t$  константу и меняя масштаб безразмерных координат, мы возвращаемся к исходной ситуации. •