§ 3. Взаимодействие электронов и излучения в разреженной плазме

В идеальной строго однородной модели Вселенной рекомбинация происходит так, как это описано в предыдущем параграфе; при $z<600$, $T<1600$ °K наступает закалка, т. е. достигается остаточная степень ионизации $\alpha_\infty \sim 10^{-4}$ или 10^{-5} (в зависимости от Ω). При этом температура слабононизованного газа следует за температурой излучения (благодаря обмену энергией при комптоновском рассеянии) вплоть до $z\sim 150$, $T\sim 400$ °K. В последующем теплообмен становится слишком слабым, газ остывает адиабатически, $T\sim(1+z)^2$, что даст к сегодняшнему дню $z=0$, $T_0=\frac{400}{150^2}=2\cdot 10^{-2}$ °K.

Эта идеализированная картина снльнейшим образом отличается от действительности. Значительная часть газа в действительности превращается в галактики, звезды, квазары и т. п. плотные тела. Оставшийся газ нагревается и ионизуется. Ионизованный газ при этом уже не находится в равновесии с реликтовым излучением, температура которого низка.

В данном параграфе рассматриваются процессы, ведущие к охлаждению плазмы, находящейся в поле более холодного излучения, и находится энергия, необходимая для поддержания плазмы при высокой температуре.

В частности, при каждой заданной температуре плазмы подсчитывается соответствующая стационарная степень ионизации газа. Формула Саха в данном случае непрнменима, ионизация происходнт за счет электронных ударов, а рекомбинация — с испусканием фотонов. Для $10^5<T<10^6$ °K степень ионизации не зависит от плотности и описывается формулой Эльверта

$$\frac{\text{HII}}{\text{HI}}=\frac{q_{1i}}{a_{\text{полн}}}\approx 10^6\frac{kT}{I}e^{-I/kT}=6Te^{-158\,000/T\,\text{°K}}.$$

Аналогичные формулы имеют место для He II и He III (с заменой 158 000 на 286 000 и 632 000 соответственно).

Эта формула дает практически полную ионизацию водорода при 10^5 и 10^6 °K, но малую ($\sim 10^{-2}$) ионизацню при 10^4 °K, в отличне от формулы Саха.

Главными процессами в полностью ионизованной нерелятивистской плазме (4000 °K$<T<10^8$ °K), взаимодействующей с мягкими фотонами ($h\nu<0{,}1$ *Мэв*), являются:

1) тормозное излучение и поглощение;
2) комптоновское рассеяние излучения;
3) рекомбинационное излучение и фотоионизация.

Скорость излучения энергии тормозными процессами $e^-+Z\to e^-+Z+\gamma$ характеризуется дифференциальным сечением излучения фотона в интервале энергии E, $E+dE$:

$$d\sigma=\frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}}\frac{Z^2e^6g(E)}{m_ec^3E_0E}dE, \tag{8.3.1}$$

где $g(E)=1$ для $E\gg\frac{\sqrt{2}E_0^{3/2}h}{\pi Ze^2\sqrt{m}}$, $g(E)=0$ для $E>E_0$,

$$g(E)=\ln\frac{2\sqrt{2}E_0^{3/2}h}{1{,}78\pi Ze^2\sqrt{m}E} \quad \text{для} \quad E\ll\frac{\sqrt{2}E_0^{3/2}h}{\pi Ze^2\sqrt{m}}.$$

Здесь E_0 — энергия электрона, Z — заряд ядра. Число фотонов, рождающихся в единицу времени, пропорционально интегралу $\int\frac{d\sigma}{dE}dE$, который расходится из-за излучения множества мягких фотонов, возникающих при прохождении электрона вдалеке от протона. Однако в энергетический баланс входит среднее сечение, определяемое иной формулой. Больший смысл имеет величина

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{E_0}\int E\frac{d\sigma}{dE}dE=\frac{16\pi^2Z^2e^6\bar{g}}{3\sqrt{3}m_ec^3E_0^2}. \tag{8.3.2}$$

Эта величина $\bar{\sigma}$ определяет скорость потери энергии электронов с данной начальной энергией E_0. Для максвелловского распределения электронов и однозарядных ионов (протонов)

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-n_en_p\overline{\sigma v}E_0=1{,}43\cdot10^{-27}\bar{g}\sqrt{T}n_en_p\ \text{эрг/см}^3\cdot\text{сек}, \tag{8.3.3}$$

где $\bar{g}\approx0{,}8$, v — скорость.

Введем характерное время τ потери энергии при тормозном [свободно-свободном (free-free по-английски)] излучении:

$$\tau_{ff}=\frac{3nkT}{d\varepsilon/dt}=3.6\cdot10^{11}\frac{\sqrt{T}}{n_p}\text{сек}. \tag{8.3.4}$$

Выше мы рассматривали только тормозное излучение; такой расчет относится к оптически тонкой плазме, т. е. к условиям, когда фотоны немедленно уходят из плазмы.

В противоположном случае, когда в рассматриваемом объеме излучение находится в равновесии, соответствующем температуре T_γ, а электроны холодные, преобладает тормозное поглощение, электроны нагреваются. Очевидно, что при равенстве температуры электронов и излучения имеет место равновесие и обмен энергией прекращается. С учетом тормозного поглощения приблизительно

$$\frac{dT_e}{dt}=\frac{T_\gamma-T_e}{\tau_{ff}}, \tag{8.3.5}$$

причем в выражение τ_{ff} входит именно T_e, а не T_γ.

Перейдем к рассмотрению другого процесса, существенного при наличии фотонов. Комптоновское рассеяние фотонов имеет сечение, не зависящее от частоты (томсоновское сечение в нерелятивистском пределе):

$$\sigma_т=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2=6{,}65\cdot 10^{-25}\,см^2. \qquad (8.3.6)$$

Угловая зависимость — слабая и симметричная (θ — угол рассеяния, Ω — телесный угол):

$$d\sigma_т=\mathrm{const}\cdot(1+\cos^2\theta)\,d\Omega. \qquad (8.3.7)$$

Рассмотрим среднюю силу, действующую на покоящийся электрон в неизотропном поле излучения, т. е. с интенсивностью, зависящей от направления.

Излучение с направлением $\boldsymbol{n}$ несет в этом направлении поток энергии $\Phi\boldsymbol{n}$ и поток количества движения $\Phi\boldsymbol{n}/c$. Величина Φ имеет размерность *эрг/см²·сек*.

Рассеянное излучение, в силу симметрии закона рассеяния, имеет нулевое количество движения. Количество движения, отдаваемое в единицу времени электрону, т. е. сила, действующая на электрон, есть $\boldsymbol{f}=\Phi\boldsymbol{n}\sigma_т/c$. Переходя от отдельного пучка к распределению излучения по углам, получим *)

$$\boldsymbol{f}=\frac{\sigma_т}{c}\int\Phi(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}\,d\Omega.$$

Это выражение можно сопоставить с выражением потока энергии в произвольном поле излучения

$$\boldsymbol{q}=\int\Phi(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}\,d\Omega. \qquad (8.3.8)$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{q}\frac{\sigma_т}{c}\;{}^{**)}. \qquad (8.3.9)$$

Поставим теперь несколько иную задачу, характерную для космологии: изотропное, равновесное, покоящееся в среднем излучение (поток энергии равен нулю) заполняет пространство. В этом пространстве движется электрон со скоростью $\boldsymbol{u}$, $|\boldsymbol{u}|\ll c$. Какая сила действует на электрон?

Сведем задачу к предыдущей, переходя в систему координат, в которой электрон покоится.

---

*) При этом мы меняем обозначения, под интегралом Φ имеет размерность *эрг/см²·сек·стер*.

**) Ниже будет показано, что сила содержит также слагаемое, пропорциональное квадрату потока излучения. Здесь рассматриваем малые q и этим эффектом пренебрегаем.

Поток энергии в лоренц-преобразованной системе координат равен $q=-{}^4/_3\varepsilon_\gamma u$, где ε_γ — плотность энергии излучения. Минус означает, что в системе покоя электрона поток направлен навстречу движению электрона в изотропном поле. Множитель ${}^4/_3$ появляется потому, что к потоку энергии в собственном смысле $\varepsilon_\gamma u$ добавляется работа давления $up=-u\frac{1}{3}\varepsilon_\gamma$.

Этот множитель ${}^4/_3$ появляется и при формальном лоренц-преобразовании тензора энергии-импульса T_{ik} по правилам тензорного анализа. Квадратом скорости u^2/c^2 при этом пренебрегаем. Итак, средняя сила и соответствующее ускорение суть

$$f=m\frac{du}{dt}=q\frac{\sigma_\tau}{c}=-\frac{4}{3}\sigma_\tau\varepsilon\frac{u}{c}. \qquad (8.3.10)$$

Можно ввести время затухания скорости; удобнее, однако, умножив обе части равенства на u, написать уравнение для кинетической энергии электрона.

Электроны, имеющие кинетическую энергию E, теряют ее из-за столкновений с фотонами со скоростью

$$\frac{dE}{dt}=-um_e\frac{du}{dt}=-\frac{8}{3}E\frac{\sigma_\tau\varepsilon}{m_ec}. \qquad (8.3.11)$$

Здесь ε — плотность энергии поля излучения.

Характерное время потери энергии из-за комптоновского рассеяния есть

$$\tau_к=\frac{3m_ec}{8\sigma_\tau\varepsilon}. \qquad (8.3.12)$$

Закон убывания энергии, выписанный выше, неточен: энергия электрона падает не до нуля, а до тепловой энергии, соответствующей равенству температуры электронов и температуры излучения. Следовательно, точное уравнение имеет вид

$$\frac{dE}{dt}=\frac{{}^3/_2kT_\gamma-E}{\tau_к}. \qquad (8.3.13)$$

Физическая причина заключается в том, что в поле излучения электрон испытывает хаотическую силу, увеличивающую его энергию при случайных актах рассеяния фотонов, наряду со средней тормозящей силой. Простая формула (8.3.13) относится к электрону в поле равновесного планковского излучения.

Наконец, роль третьего процесса (см. перечисление в начале § 3) — процесса рекомбинации и излучения линий велика при низких температурах. При $T=10^4$ °К излучение в рекомбинационном континууме и линиях приблизительно в 100 раз сильнее, чем истинное тормозное.

ТАБЛИЦА VIII

Характерные времена основных процессов в ионизованной космологической плазме

	z	0	30	1000
	ε_γ, *эрг/см*^{3}	$4\cdot10^{-13}$	$4\cdot10^{-7}$	0,4
	n_e, *см*$^{-3}$	$6\cdot10^{-6}$	0,2	$6\cdot10^3$
	t, *сек*	$4\cdot10^{17}$	$2{,}4\cdot10^{15}$	$1{,}3\cdot10^{13}$
$T=10^5$ °К	$\tau_к$	$4\cdot10^{19}$	$4\cdot10^{13}$	$4\cdot10^7$
	τ_{ff}	$2\cdot10^{19}$	$6\cdot10^{14}$	$2\cdot10^{10}$
	τ_{fb} (τ_{fb} (H))	$2\cdot10^{18}$ ($6\cdot10^{18}$)	$7\cdot10^{13}$ ($2\cdot10^{14}$)	$2\cdot10^9$ ($6\cdot10^9$)
	τ_{bb} (τ_{bb} (H))	$4\cdot10^{17}$ ($7\cdot10^{18}$)	10^{13} ($2\cdot10^{14}$)	$4\cdot10^8$ ($7\cdot10^9$)
	τ_{ee}	$5\cdot10^{10}$	$1{,}5\cdot10^6$	50
$T=10^6$ °К	$\tau_к$	$4\cdot10^{19}$	$4\cdot10^{13}$	$4\cdot10^7$
	τ_{ff}	$6\cdot10^{19}$	$2\cdot10^{15}$	$6\cdot10^{10}$
	τ_{fb} (τ_{fb} (H))	$8\cdot10^{19}$ ($2\cdot10^{20}$)	$3\cdot10^{15}$ ($8\cdot10^{15}$)	$8\cdot10^{10}$ ($2{,}5\cdot10^{11}$)
	τ_{bb} (τ_{bb} (H))	$2\cdot10^{20}$ ($1{,}5\cdot10^{21}$)	$7\cdot10^{16}$ ($5\cdot10^{17}$)	$2\cdot10^{11}$ ($1{,}5\cdot10^{12}$)
	τ_{ee}	$1{,}5\cdot10^{12}$	$5\cdot10^7$	$1{,}5\cdot10^3$

Время обмена энергией между электронами дается формулой

$$\tau_{ee}=(\sigma_{ee}n_e v)^{-1}=n_e^{-1}\sqrt{\frac{m}{kT_e}}\left(\frac{e^2}{kT_e}\right)^{-2}(\pi\ln\Lambda)^{-1}; \qquad (8.3.14)$$

$\ln\Lambda$ учитывает далекие столкновения [см. Спитцер (1962)] и имеет величину порядка 30.

Для примера сравним τ_{ff}, $\tau_к$ и τ_{ee} при $\Omega=1$ и разных z; рассмотрено вещество, содержащее 30% He^4 по весу (табл. VIII). При этом $\tau_к$ не зависит от Ω, тогда как τ_{ff} и τ_{ee} обратно пропорциональны Ω.

В табл. VIII разные столбцы отвечают разным z. В первых трех строчках приведены: ε_γ — плотность энергии реликтового излучения, n_e — плотность электронов для $\Omega=1$, $H_0=75$ *км/сек·Мпс* и при полной ионизации, t — время от начала космологического расширения. Далее приводятся характерные времена в секундах для различных значений температуры электронов $T_e=10^5$ и 10^6 °К. Помимо $\tau_к$, τ_{ff} и τ_{ee} приведены также характерные времена свободно-связанных τ_{fb} и связанно-связанных τ_{bb} переходов. В скобках даны соответствующие времена для чисто водородной (без гелия) плазмы.

Таблица показывает, что электронные столкновения наиболее быстрые. Обмен энергией между электронами ведет к максвелловскому распределению по энергиям отдельных электронов. Но эти столкновения не меняют общей энергии электронов и, следовательно, параметр максвелловского распределения — температура электронов — определяется другими процессами. Потери энергии были вычислены выше для того, чтобы дать порядок величины времени релаксации электронов.

Обратно, по величине времени релаксации можно найти величину подкачки энергии, необходимую для поддержания высокой температуры электронов (во много раз превышающей температуру излучения):

$$Q\ эрг/см^3 = \varepsilon_p \sum \frac{1}{\tau} = 3nkT\left(\frac{1}{\tau_к} + \frac{1}{\tau_{ff}} + \frac{1}{\tau_{fb}} + \frac{1}{\tau_{bb}} + \frac{1}{t}\right).$$

В эту формулу не входит τ_{ee}, поскольку взаимодействие электронов между собой перераспределяет их энергию, но не меняет ее. С другой стороны, введено $1/t$ (точнее, надо ввести $2H^{-1}$, где H — мгновенное значение хаббловской константы), так как космологическое расширение также снижает температуру плазмы, поскольку оно адиабатическое.

Итак, главным в каждом случае является тот процесс, для которого τ минимально. При отсутствии источников энергии температура плазмы падает не до нуля, а до температуры излучения T_γ.

Для случаев, представленных в таблице, при этом произойдет рекомбинация и изменятся все параметры. Однако вопрос о стационарной температуре электронов представляет принципиальный интерес, особенно для более высокой температуры излучения. Если поле излучения равновесное, планковское с температурой θ, то стационарная температура $T_{ст}$ тождественно равна θ.

В начале развития квантовой теории гиганты, подобные Эйнштейну, доказывали, что излучение как раз поддерживает нерелятивистские частицы в броуновском движении с соответствующей кинетической энергией *). Теперь мы считаем это само собой разумеющимся и интересуемся более сложной ситуацией: какова будет электронная температура в произвольном (не планковском) поле излучения? Ответ для тормозных процессов дается легко. Обозначим спектральный объемный коэффициент излучения плазмы через $Q(\nu, T_e)$. Определяя Q, предполагаем, что плазма оптически тонкая и никакая радиация извне не приходит. Если теперь плазма находится в поле излучения, характеризуемого спектральной интенсивностью $F_\nu\left(\frac{эрг}{см^2 \cdot сек \cdot стер \cdot гц}\right)$, то

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\int Q(\nu,\ T_e)\left[1 - \frac{F(\nu)}{F_{равн}(\nu, T_e)}\right] d\nu, \qquad (8.3.15)$$

*) Тем самым подтверждалась квантовая картина и наличие импульса у фотона.

где $F_{\text{равн}}(\nu, T_e)$ — равновесный поток, соответствующий электронной температуре T_e:

$$F_{\text{равн}}(\nu, T_e)=\frac{2h\nu^3}{c^2}(e^{h\nu/kT_e}-1)^{-1}, \qquad (8.3.16)$$

и электронная температура определяется из условия $\frac{d\varepsilon}{dt}=0$.

Ясно, что если $F_\nu=F_{\text{равн}}(\nu, \theta)$, то $T_e=\theta$, независимо от детального вида Q, благодаря тому, что $1-\frac{F(\theta)}{F(T_e)}\equiv 0$ при $T_e=\theta$. Если $F\neq F_{\text{равн}}$, ответ должен быть найден численно. Важно, что на малых частотах $F_{\text{равн}}\sim\nu^2$, $Q\sim\lg\left(\frac{kT}{h\nu}\right)$ и, следовательно, $F(\nu)$ входит в интервал с весом $\nu^{-2}\lg\left(\frac{kT}{h\nu}\right)$, который велик на малых частотах; значит, именно интенсивность на малых частотах определяет электронную температуру. Проблема легко обобщается на случай внешнего источника энергии (космические лучи, плазменные колебания), который должен быть расположен в правой части уравнения для $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

В общем случае неравновесного $F(\nu)$ тормозные процессы сами по себе не должны вести к максвелловскому распределению электронов, но столкновения электронов друг с другом «максвеллизуют» их. Проблема взаимодействия электронов с излучением из-за рассеяния (в пределе при низкой плотности n_e) более сложна. Она была рассмотрена Драйцером (1964). Ответ для электронной температуры в неравновесном (но изотропном!) поле излучения был дан полностью Пейро (1968), Зельдовичем и Левичем (1970). Она имеет вид

$$T_e=\frac{c^2}{8k}\,\frac{\int F(\nu)\left[F(\nu)+\frac{2h\nu^3}{c^2}\right]\frac{d\nu}{\nu^2}}{\int F(\nu)\,d\nu}. \qquad (8.3.17)$$

Формула лучше выглядит, если вместо потока ввести число заполнения фотонами фазового пространства:

$$kT_e=\frac{h^2\int n(\nu)\,[n(\nu)+1]\,\nu^4\,d\nu}{4h\int n(\nu)\,\nu^3\,d\nu}. \qquad (8.3.18)$$

Знаменатель пропорционален ε — общей плотности энергии излучения, потому что он характеризует комптоновские потери энергии у электрона. Интеграл в числителе — это скорость приобретения энергии. Выражение для набора энергии появится еще раз в следующем параграфе. Отметим необычную форму числителя. Он содержит F^2/ν^2. Следовательно, если $F\sim\nu^\alpha$, $\alpha<0{,}5$, то интеграл расходится; малый поток энергии на длинных волнах очень важен для электронов, даже если этот поток пренебрежимо мал в полном потоке энергии. Из второй формулы можно видеть, что на длинных волнах (малых ν) важен индуцированный комптон-эффект. Индуцированные процессы появляются потому, что фотоны являются бозе-частицами, и вероятность перехода в определенное состояние зависит, как $n+1$, от числа n фотонов, которые уже есть в этом состоянии *).

Классическая модель индуцированного рассеяния, нагревающего электроны, состоит в том, что электромагнитная волна (1) заставляет электрон колебаться: $m\ddot{x}=e\mathscr{E}_1e^{i\omega t}$, $\dot{x}=-i\frac{e}{m\omega}\mathscr{E}_1$. Другая волна (2) действует на электрон с силой Лоренца благодаря своему магнитному полю: $f=\frac{e}{c}\overline{[\dot{x},\mathscr{H}_2]}=\frac{e^2}{cm\omega}\overline{[\mathscr{E}_1,\mathscr{H}_2]}$. Важно, что $\mathscr{H}_1$ — магнитное поле первой волны — имеет ту же фазу, как и $\mathscr{E}_1$, так что $\dot{x}$ сдвинут на 90° по отношению к $\mathscr{H}_1$, $\overline{[v,\mathscr{H}_1]}=0$. В волнах с одним направлением распространения эффекта нет. Нужно, чтобы вторая волна имела другое направление. В хаотическом поле квадраты отдельных толчков силы складываются, так что чистый набор энергии пропорционален $\frac{\mathscr{E}_1^2\mathscr{H}_2^2}{\omega^2}$, что дает для изотропного излучения $F\sim\mathscr{E}^2\sim\mathscr{H}^2$. Слагаемое с h исчезает при классическом рассмотрении. Для планковского спектра снова получается тождество $T_e=T_\gamma$. Важный вывод состоит в том, что комптоновское рассеяние ведет к максвелловскому распределению даже без электронных столкновений, $e+e'=e''+e'''$. Очевидно, что электронные столкновения ничему не повредят. Комптоновский нагрев электронов важен не только в космологии, но также и для поведения плазмы в окрестности квазаров и пульсаров [подробности см. у Левича и Сюняева (1971)]; влияние индуцированного комптоновского рассеяния на спектры радиоисточников рассматривается в работе Сюняева (1971).

Из сравнения характерных времен $\tau_к$, τ_{ff} с космологическим временем t (см. табл. VIII) мы видим, что комптоновское рассеяние важно для электронов при $z>10$. После этого момента электроны уже практически не взаимодействуют с излучением; их температура с этого времени и в настоящее время зависит от нагрева ударными волнами и космическими лучами и охлаждения из-за адиабатического расширения, связанного с общим расширением Вселенной. Последние процессы рассмотрены Гинзбургом и Озерным (1965). Характерное время адиабатического расширения есть $t_{косм}$ (оно приведено в табл. VIII в третьей строчке). При малых z это время наименьшее, что и означает, что процесс стал главным.

*) В равновесном нерелятивистском случае для планковского спектра и $kT_\gamma\ll mc^2$ индуцированные процессы малы.