

где $a = \frac{8\pi}{c^3}$. Увеличение энергии излучения в единице объема равно энергии, отдаваемой электронами в этом объеме. Если электроны не имеют других источников энергии, то их температура стационарна, только если $\frac{de}{dt} = 0$. Это нам снова дает формулу (8.3.18).

Кинетическое уравнение для распределения фотонов было написано без учета расширения. Расширение учитывается заменой $\frac{\partial n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + H\nu \frac{\partial n}{\partial \nu}$ (где H — постоянная Хаббла), в левой части уравнения. Без комптоновского рассеяния n сохраняется для «краснеющей» при расширении частоты, $\frac{d\nu}{dt} = -H\nu$. Простое преобразование дает другой путь для учета расширения. Мы введем идеальную температуру излучения, зависящую от времени по закону красного смещения: $T_{\text{ов}}(t) = T_0(1+z)$, где T_0 — сегодняшняя температура, $z=0$, $T_0 = T_{\text{ов}}(0) = 2,7$ °К. Определим $x = \frac{h\nu}{kT_{\text{ов}}}$. Уравнение для $n(x, t)$ будет

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e k T_{\text{ов}}(t)}{m_e c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left[n(n+1) + \frac{T_e}{T_{\text{ов}}} \frac{\partial n}{\partial x} \right]. \quad (8.4.5)$$

Если $T_e = T_{\text{ов}}$, тогда равновесное $n = \frac{1}{e^x - 1}$ оказывается точным решением, хотя n , как функция от ν и t , зависит от времени потому, что $T_{\text{ов}}$ зависит от времени. Это решение самосогласованно, так как $T_e = T_{\text{ов}}$ — это также решение для температуры электронов, если никакой энергии в системе не выделяется.

Теперь мы обсудим вопрос о выделении энергии на разных этапах.

§ 5. Раннее выделение энергии и квазиравновесие

Представим себе какие-то локальные мелкомасштабные возмущения идеальной, однородной, изотропной космологической модели на стадии радиационно-доминированной плазмы. Примерами таких возмущений могут быть акустические волны, распространяющиеся по РД-плазме, или островки плазмы, состоящей из антивещества и фотонов, окруженные нормальной плазмой из вещества и фотонов. Эти возмущения исчезают: акустические волны затухают за счет вязкости, антивещество аннигилирует. Исчезновение возмущений сопровождается выделением энергии. Плотность энергии РД-плазмы, т. е. величина ϵ_ν , увеличивается.

В замкнутом теплонепроницаемом сосуде постоянного объема конечный результат был бы очевиден. Возникло бы новое термодинамическое равновесие, соответствующее новому, увеличенному значению ϵ_ν .

Однако в эволюционирующем, расширяющемся мире равновесие может и не успеть установиться. В момент рекомбинации взаимодействие излучения с электронами прекращается, между собой фотоны практически не взаимодействуют, так что замораживается то состояние излучения и тот спектр, которые получатся к моменту рекомбинации. Принято говорить, что происходит закалка спектра. Необходимо проследить последовательность изменения спектра с течением времени после выделения энергии. В зависимости от того, в какой момент произошло выделение энергии, момент закалики спектра застанет излучение на той или иной стадии. Отметим, что само по себе общее космологическое расширение меняет спектр, оставляя его форму, т. е. оставляет неравновесный спектр неравновесным. Подробно это было рассмотрено ранее (см. § 11 гл. 3). Однако вследствие расширения время взаимодействия излучения и электронов становится конечным. В теорию входят интегралы вида $\int n_e dt$, $\int n_e T_e dt$, $\int n_e^2 f(T) dt$. Так как $n_e \sim t^{-3/2}$, $T_e \sim t^{-1/2}$ (см. § 2 гл. 6), значения этих интегралов зависят наиболее сильно от нижнего предела интегрирования, т. е. от момента выделения энергии (или соответствующего красного смещения z), а не от верхнего предела — момента рекомбинации.

Итак, рассмотрим последовательность событий во время и после выделения энергии. Предполагаем, что до выделения энергии спектр был равновесным.

Конечным результатом аннигиляции являются быстрые электроны. Рассеяние равновесного излучения на таких электронах дает смещенный (чаще вверх, чем вниз, по температуре) планковский спектр. Получающийся при этом результирующий спектр можно представить как суперпозицию планковских спектров с различными температурами:

$$F(\nu) = \int P(\nu, T) R(T) dT, \quad (8.5.1)$$

где $P(\nu, T)$ — истинно равновесный планковский спектр, соответствующий температуре T , R — взвешивающая функция [Зельдович, Илларионов, Сюняев (1972)].

Рассмотрим акустические волны. В РД-плазме происходит движение, и градиент скорости не мал, на макроскопическом языке вязкость плазмы вызывает затухание движения. С микроскопической точки зрения наблюдатель, «оседлавший» какой-нибудь электрон плазмы, «видит» в различных направлениях излучение с различным — синим или красным — смещением, т. е. видит излучение разной температуры.

Рассеяние на электронах перемешивает излучение, приходящее под разными углами.

После затухания макроскопического движения излучение становится изотропным, спектр его не зависит от направления. Однако

этот спектр оказывается не равновесным, а снова описывается суперпозицией планковских спектров [см. формулу (8.5.1)].

Такой вид спектра является универсальным для первой стадии после выделения энергии. Время, необходимое для получения такого спектра, есть время, необходимое для томсоновского рассеяния, порядка $\tau_{\nu e} = \frac{1}{(\sigma_T n_e c)}$, поскольку каждый акт рассеяния меняет направление фотона в среднем на $\pi/2$, уменьшает анизотропию вдвое.

Мы полагаем, что до выделения энергии было планковское распределение с температурой T_1 . Это соответствует формально

$$R(T) = \delta(T - T_1), \quad \text{т. е.} \quad \int R(T) dT = 1.$$

При выделении энергии сохраняется плотность фотонов

$$N = a \int T^3 R(T) dT, \quad (8.5.2)$$

где

$$a = \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{k}{h}\right)^3 \pi^2 \cdot 0,244, \quad (8.5.3)$$

а также сохраняется величина

$$\int R(T) dT = 1.$$

Плотность энергии выражается величиной

$$\epsilon_\nu = \sigma \int T^4 R(T) dT, \quad \sigma = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}. \quad (8.5.4)$$

Спектральная плотность энергии излучения в области низкой частоты дается формулой Рэля — Джинса:

$$\epsilon_\nu(\nu) = f \nu^2 T_{p\text{-дж}}, \quad f = \frac{8\pi k}{c^3}, \quad (8.5.5)$$

где $T_{p\text{-дж}} = \int T R(T) dT$.

Можно показать, что при сохранении N и $\int R(T) dT$ увеличение ϵ_ν сопровождается понижением $T_{p\text{-дж}}$: выделение энергии сопровождается перекачкой фотонов из низкочастотной в высокочастотную область. При этом, если

$$\epsilon'_\nu = \epsilon_\nu (1 + \delta) = \sigma T_1^4 (1 + \delta),$$

то

$$T_{p\text{-дж}} = T_1 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right); \quad (8.5.6)$$

здесь δ — относительная величина выделившейся энергии. Получающийся спектр показан на рис. 36 пунктиром. Сплошная линия представляет собой планковский спектр, соответствующий T_1 , приведенный для сравнения.

С учетом расширения в формулы вместо T_1 нужно подставить $T_1 \frac{1+z}{1+z_0}$, т. е. ту температуру, которая к данному моменту (данному z) получилась бы в невозмущенном случае.

Изменение спектра, показанное на рис. 36, очень трудно обнаружить — для этого необходимы точные измерения в двух областях — рэлей-джинсовской ($h\nu < kT$) и вблизи максимума ($h\nu > 2kT$). Однако дальнейшие процессы, происходящие в РД-плазме, дают гораздо более яркие изменения спектра.

Дело в том, что пунктирный спектр не является термодинамически равновесным. Электроны, входящие в состав РД-плазмы, чувствуют эту неравновесность лучше, чем наши спектральные приборы. По формулам предыдущего параграфа можно рассчитать ту температуру, которую приобретут электроны, взаимодействующие с излучением, спектр которого задан суперпозицией планковских функций.

В хорошем приближении

$$T_e \approx \frac{\int T^5 R dT}{\int T^4 R dT}. \quad (8.5.7)$$

Расчет дает (для малого δ)

$$T_e \approx T_1 \left(1 + \frac{3\delta}{2}\right) \approx T_{p. \text{ джк}} (1 + 2\delta). \quad (8.5.8)$$

Электроны горячее, чем низкочастотное излучение (левее звездочки на рис. 36), и холоднее, чем высокочастотное излучение. Яркостная температура излучения вдоль пунктирной кривой не постоянна, она растет вправо. Происходят два типа процессов:

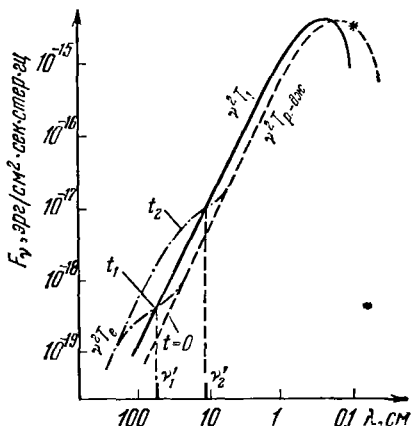


Рис. 36. Эволюция во времени $0 < t_1 < t_2$ спектра излучения (вначале, при $t=0$, спектр был суперпозицией планковских функций) за счет тормозного излучения плазмы с температурой $T_e > T_{p. \text{ джк}}$. Для сравнения приведен планковский спектр излучения с температурой T_1 до выделения энергии.

а) тормозные; б) изменение частоты при рассеянии. Тормозное излучение и поглощение в РД-плазме интегрально (по всему спектру) мало, однако в области низких частот его роль возрастает. В самом деле, спектр тормозного излучения плоский (не зависит

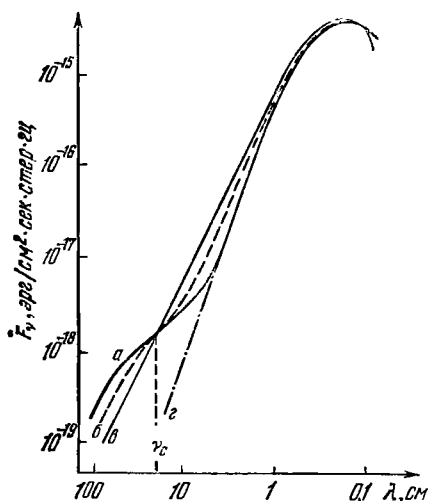


Рис. 37. «Замывание» бозе-эйнштейновских искажений спектра излучения вследствие совместного действия комптоновских и тормозных процессов. Химический потенциал излучения падает вдоль последовательности кривых $a \rightarrow b \rightarrow c$ ($\mu_a > \mu_b > \mu_c$). Кривая b соответствует конечному планковскому равновесному спектру. Кривая c — бозе-эйнштейновский спектр, построенный с учетом только комптоновских процессов и соответствующий тому же химическому потенциалу, что и кривая a .

от ν), а рэлей-джинсовский спектр $F_\nu \sim \nu^2$, поэтому время достижения равновесия пропорционально ν^2 . Всегда есть такая область $\nu < \nu'$, в которой достигается равновесие, соответствующее T_e , это ν растет с течением времени. На рис. 36 схематически показана эволюция спектра за счет тормозных процессов. Возникает вторая рэлей-джинсовская область при $\nu < \nu'_2$. Ступенька, на которой происходит переход, с течением времени передвигается вправо (от ν'_1 к ν'_2). Малость тормозного излучения проявляется в том, что ν' никогда не достигает максимума планковской кривой, всегда $h\nu' \ll kT$. Всегда остается существенная область спектра, в которой рассеяние, с учетом изменения частоты фотонов (а не тормозные процессы), является главным.

В предельном случае, полностью пренебрегая тормозными процессами, поставим задачу о равновесном спектре излучения при фиксированной плотности фотонов. Ответ дается обобщенной формулой Бозе — Эйнштейна

на с положительным химическим потенциалом:

$$n = \left[\exp \frac{(h\nu + \mu)}{kT_e} - 1 \right]^{-1}. \quad (8.5.9)$$

Легко убедиться, подставляя это n в уравнение (8.4.1), что $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, т. е. действительно достигнуто равновесие по процессам рассеяния. Спектр (8.5.9) весьма сильно отличается от планковского в области $h\nu < \mu$, асимптотически $F_\nu = \text{const} \cdot \nu^3 (e^{\mu/kT} - 1)^{-1}$ вместо $F_\nu \sim \nu^2$ т. е. меняется степень ν . Спектр (8.5.9) показан на рис. 37, кривая z .

Величину μ легко выразить через выделение энергии. Интегрируя по спектру, найдем

$$\left. \begin{aligned} N &= \text{const} \cdot T^3 \left(1 - 1,37 \frac{\mu}{kT} \right), \\ \epsilon &= \text{const} \cdot T^4 \left(1 - 1,11 \frac{\mu}{kT} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.5.10)$$

Отсюда при $N = \text{const} = N_1$, $\epsilon'_\nu = \epsilon_\nu (1 + \delta)$ получим

$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 (1 + 0,64\delta), \\ \mu &= 1,4kT_1\delta. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.11)$$

В действительности на спектр влияют оба механизма одновременно: и тормозное излучение, и перераспределение фотонов при рассеянии. В результате получается спектр, показанный на рис. 37 (кривая *a*), со своеобразным провалом выше определенной частоты ν_c .

При меньшей частоте имеет место равновесие, поддерживаемое тормозным излучением и поглощением. В переходной области $\nu \sim \nu_c$ фотоны диффундируют в сторону повышения частоты. При $\nu > \nu_c$ имеет место бозе-эйнштейновское равновесие с химическим потенциалом. С течением времени в период, когда выделение энергии прекратилось, происходит уменьшение химического потенциала вследствие притока в область $\nu > \nu_c$ фотонов, рожденных с частотой $\nu < \nu_c$. При этом сама величина ν_c практически остается постоянной. Уменьшается глубина провала, т. е. происходит «замывание» искажений спектра (рис. 37, кривая *b*), и спектр приближается к истинно равновесному планковскому (кривая *в*) с новой энергией и температурой:

$$\epsilon'_\nu = \epsilon_\nu (1 + \delta) = \sigma T'^4, \quad T' = T_s \left(1 + \frac{\delta}{4} \right). \quad (8.5.12)$$

Подробный расчет всех деталей изложен в работах Сюняева, Зельдовича (1970б), Илларионова, Сюняева (1974 а, б).

Здесь ограничимся результатами.

1) Наибольшие искажения в спектре приходятся на область $h\nu < kT$, т. е. на рэлей-джинсовскую часть спектра; соответствующая длина волны слабо зависит от момента выделения энергии и от количества выделившейся энергии $\delta\epsilon_\nu$ и определяется плотностью электронов, т. е. выражается через Ω , $\lambda_m = 2,5\Omega^{-1/2}$ см:

$$\lambda_m = 2,5 \text{ см при } \Omega = 1; \quad \lambda_m = 8,5 \text{ см при } \Omega = 1/4 \quad (8.5.13)$$

(Ω отнесено к $H = 75 \text{ км/сек} \cdot \text{Мпс}$).

2) Чувствительность спектра к выделению энергии существенно зависит от момента выделения. Максимальная чувствительность весьма велика: чтобы получить безразмерное отклонение α от рэлей-джинсовского закона при $\lambda = \lambda_m$, нужно, чтобы химический

потенциал составлял $\mu = 1,7\alpha h\nu_m$, где $\nu_m = c/\lambda_m$. При этом безразмерное выделение энергии δ (отнесенное к плотности энергии ϵ_ν в момент выделения)

$$\delta = 1,2\alpha \frac{h\nu_m}{kT} = 0,25\Omega^{1/4}\alpha, \quad (8.5.14)$$

т. е. $\delta = 0,25\alpha$ при $\Omega = 1$ или $0,013\alpha$ при $\Omega = 1/45$.

3) В настоящее время наблюдения не обнаруживают отклонений от рэлей-джинсовского закона в длинноволновой части спектра. Консервативная оценка точности измерений дает $\alpha < 0,1$, что соответствует $\delta < 0,025$ при $\Omega = 1$, $\delta < 10^{-3}$ при $\Omega = 1/45$. Эти ограничения весьма сильны и существенно влияют на выбор возможных типов возмущений и спектра возмущений однородной изотропной Вселенной.

4) Наиболее «опасным», дающим наибольшие изменения спектра α при данном выделении энергии δ , является период с z в пределах $2,7 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} < z < 1,2 \cdot 10^5 \Omega^{-1/2}$, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} 2,7 \cdot 10^4 < z < 1,2 \cdot 10^5 \text{ для } \Omega = 1, \\ 1,8 \cdot 10^5 < z < 1,2 \cdot 10^7 \text{ для } \Omega = 1/45. \end{array} \right\} \quad (8.5.15)$$

При более позднем выделении энергии время эволюции спектра недостаточно для выработки отклонений от рэлей-джинсовского закона. Позднее выделение энергии (в частности, после периода РД-плазмы, т. е. после рекомбинации) специально рассматривается в следующем параграфе.

Более раннее выделение энергии при z больше указанного выше приводит к тому, что успевает произойти некоторое «замывание» отклонений.

Илларионов и Сюняев (1974б) показали, что при наблюдаемых параметрах Вселенной не успевают существенно уменьшиться даже искажения, возникшие при $z \approx 10^8$.

5) При большом выделении энергии «замывание» происходит медленно. Количество фотонов, которое должно поставить тормозное излучение для восстановления истинного равновесия, пропорционально δ , скорость излучения слабо зависит от δ . Время установления равновесия пропорционально δ/δ_{\min} , где δ_{\min} — минимальное δ , различимое при наблюдении, а не $\ln \delta/\delta_{\min}$, как это было бы в линейной теории.

При $\delta \sim 1$ отклонения в спектре, соответствующие $\alpha \sim 0,1$, могут быть замечены вплоть до $z \sim 10^7 \Omega^{-4}$. Это дает $z = 10^7$ для $\Omega = 1$, $z = 10^{10}$ для $\Omega = 0,2$. Но при $z = 10^9$ уже количество электрон-позитронных пар во много раз превышает современное количество электронов в единице сопутствующего объема. Поэтому реально максимальное z достигает 10^8 при $\Omega = 0,7$ и не растет при дальнейшем уменьшении Ω .

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 5

Когда возникло реликтовое излучение?

Подробное исследование эволюции спектра приводит к выводам, важным для теории горячей Вселенной. Впервые получен ответ на простой вопрос: когда возникло равновесное реликтовое излучение? Из приведенных чисел следует, что равновесное излучение уже существовало при z больше 10^7 — 10^8 (для двух вариантов Ω), иначе при сильном отклонении от равновесия оно не было бы равновесным сегодня.

Из теории однородной Вселенной вытекает, что были периоды, когда энергия из других форм превращалась в излучение. Наиболее поздний момент такого рода связан с аннигиляцией электронов и позитронов. Можно ли надеяться на обнаружение отклонений в спектре, связанных с этим периодом?

Выделение энергии велико: в интервале от $T = m_e c^2$ до $T = 0,1 m_e c^2$ (соответственно $2 \cdot 10^9 > z > 2 \cdot 10^8$) аннигиляция более чем удваивает энергию излучения. Затем энерговыделение быстро падает и составляет $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ в интервале $2 \cdot 10^8 > z > 10^8$, далее $\delta = 2 \cdot 10^{-7}$ для $10^8 > z > 5 \cdot 10^7$ и $\delta = 10^{-24}$ для всего остающегося интервала $5 \cdot 10^7 > z$.

Однако большие значения δ не могут быть обнаружены ни при каком Ω именно потому, что избыточные электроны и позитроны участвуют в «замыивании» спектра.

Выделение энергии при ядерных реакциях (образовании He^4) происходит в момент $t \sim 100$ сек, $T \sim 100$ кэв, $z \sim 4 \cdot 10^8$. Энергия порядка 28 Мэв на ядро He^4 в пересчете на один нуклон, с учетом образования 30% He^4 , даст около 3 Мэв, что соответствует весьма малому $\delta \sim 3 \cdot 10^{-7} \Omega$.

С учетом того, что в этот момент еще остаются позитроны и электроны, выделение ядерной энергии не может дать заметного искажения сегодняшнего спектра.

§ 6. Позднее энерговыделение

Этот случай был рассмотрен в уже цитированной работе Зельдовича и Сюняева (1969). Если энергия выделяется на поздней стадии, уже после рекомбинации, тогда снова происходит ионизация. Температура электронов возрастает до величины определенно большей, чем 10^4 °К. Температура излучения падает от 4000 °К в начале рекомбинации до современных 2,7 °К. Для поздней стадии характерно, что $T_e \gg T_\gamma$ (вместо $T_e - T_\gamma \ll T_\gamma$ в § 5). В основном уравнении (8.4.5) остается член, умноженный на $T_e/T_{0\gamma}$, а другой $n(n+1)$, отбрасывается из-за малости. И, наконец, мы получаем линейное уравнение *)

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma_T n_e c k T_e}{m_e c^2} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (8.6.1)$$

Введем снова (см. стр. 239) безразмерную величину y такую, что

$$dy = \frac{\sigma_T n_e k T_e}{m_e c} dt = \frac{k T_e}{m_e c^2} d\tau_T,$$

*) Здесь x отнесено к начальной температуре излучения или, с учетом расширения, — к $T_0(1+z)$; при этом T_0 определяется как температура излучения сегодня, если бы не было энерговыделения. Таким образом, мы допускаем, что $T_0 \neq 2,7$ °К.