/
/

ГЛАВА 9

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Теория Джинса

В этом разделе книги мы рассмотрим физические процессы, приводящие к разбиению однородной расширяющейся среды на отдельные сгустки, т. е. приводящие к появлению небесных тел и их систем.

Впервые задачу об устойчивости однородного распределения вещества математически поставил и решил в рамках теории малых возмущений Джинс (1902).

Это решение подробно изложено в известном курсе Джинса (1929). Несмотря на некоторую непоследовательность, которая будет отмечена и исправлена в последующем изложении, теория Джинса до сих пор представляет не только исторический интерес. Ее ценность подчеркивается такими прочно укоренившимися названиями, как «джинсовская длина волны», «джинсовский инкремент».

Главное в теории Джинса — учет двух факторов: 1) тяготения, стремящегося собрать вещество в отдельные комки или сгустки, и 2) давления, стремящегося выравнять неоднородности, равномерно распределить вещество.

Изложим сперва теорию в том наиболее простом виде, в каком она была создана ее автором.

Напомним общие уравнения гидродинамики и тяготения в ньютоновском приближении для идеального газа:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,\\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\operatorname{grad})\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P + \operatorname{grad}\varphi = 0,\\
&\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 4\pi G\rho,\\
&\frac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\operatorname{grad}) S = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (9.1.1)$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{u}$ — скорость, S — удельная энтропия вещества, φ — гравитационный потенциал. Предположим вслед за Джинсом, что невозмущенным состоянием является покоящийся газ ($\boldsymbol{u}=0$), равномерно распределенный в пространстве ($\rho=\rho_0=\text{const}$, $S=S_0=$

$=\mathrm{const}$). Давление его везде постоянно ($P=P(\rho_0, S_0)=\mathrm{const}$). Молчаливо предполагается, что и силы тяготения в безграничном равномерно распределенном газе каким-то образом исчезают, $\operatorname{grad}\varphi=0$, хотя это и противоречит уравнению Пуассона. Это и есть та непоследовательность, о которой мы говорили выше. К этому вопросу мы вернемся позже.

Для получения решения для возмущений обычно применяют метод разложения произвольного возмущения по какой-либо системе ортогональных функций — метод Фурье — и ищут затем развитие во времени отдельных составляющих возмущения. В нашем случае наиболее просто разложить возмущение на систему плоских волн.

Возмущенное решение ищем в виде одной плоской волны с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, наложенной на невозмущенное решение. Итак, предположим:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho(\boldsymbol{x}, t)=\rho_0\left[1+\delta(t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\right],\\
&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=0+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{w}(t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},\\
&\varphi(\boldsymbol{x}, t)=\varphi_0+f(t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},\\
&S=S_0+\sigma(t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},\\
&P=P_0+\frac{\partial P}{\partial\rho}(\rho-\rho_0)+\frac{\partial P}{\partial S}(S-S_0)=P_0+b^2\rho_0\delta e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}+h^2\sigma e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}\right\} \quad (9.1.2)$$

В выражении для скорости написано первое слагаемое «0», подчеркивающее, что невозмущенное решение $u_0=0$.

В последнем выражении для давления введены обозначения $\frac{\partial P}{\partial S}=h^2$, $\frac{\partial P}{\partial\rho}=b^2$, причем b есть адиабатическая скорость звука.

Подставим эти выражения в уравнения гидродинамики; как полагается в теории возмущений, рассматриваем только члены, линейные по δ, w, f, σ. Члены нулевого порядка (не содержащие δ, w, f, σ) описывают невозмущенное решение, и предполагается, что для них уравнения выполняются тождественно.

Членами второго порядка (квадраты и произведения малых величин δ^2, $\delta\sigma$ и т. п.) пренебрегаем.

Получим систему линейных однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{dt}+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{w}=0,\\
&\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}+i\boldsymbol{k}f+i\boldsymbol{k}b^2\delta+i\boldsymbol{k}h^2\rho_0^{-1}\sigma=0,\\
&k^2f=-4\pi G\rho_0\delta,\\
&\frac{d\sigma}{dt}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (9.1.3)$$

В теории Джинса невозмущенное решение не зависит от времени. Следовательно, в уравнениях (9.1.3) коэффициенты ρ_0, b^2, $\boldsymbol{k}$ постоянны, время t входит только под знаком дифференциала. В этом случае общая теория предсказывает определенный, а именно экспоненциальный, характер зависимости возмущений от времени *):

$$\delta = \delta_0 e^{\omega t}, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 e^{\omega t}, \quad f = f_0 e^{\omega t}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{\omega t}. \tag{9.1.4}$$

Задачей теории является определение величины ω и соотношения между величинами δ, $\boldsymbol{w}$, f, σ в собственных решениях. Абсолютная амплитуда собственного решения зависит от начальных условий.

Итак, вернемся к нашей задаче. Подставляя (9.1.4) в систему (9.1.3), получим

$$\left.\begin{aligned} \omega\delta_0 &= -i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{w}_0), \\ \omega\boldsymbol{w}_0 &= -i\boldsymbol{k}f_0 - i\boldsymbol{k}b^2\delta_0 - i\boldsymbol{k}\rho_0^{-1}h^2\sigma, \\ -k^2 f_0 &= 4\pi G\rho_0\delta_0, \\ \omega\sigma_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.5}$$

А. Адиабатические возмущения.

Наиболее интересно решение с $\omega \neq 0$, т. е. решение, зависящее от времени. В этом случае $\sigma_0 = 0$ и вектор $\boldsymbol{w}_0$ параллелен волновому вектору $\boldsymbol{k}$ Введем обозначение

$$\boldsymbol{w}_0 = w_0 \frac{\boldsymbol{k}}{k} \qquad (k = |\boldsymbol{k}|)$$

и получим окончательно систему скалярных уравнений для возмущений, зависящих от времени, с $\omega \neq 0$:

$$\left.\begin{aligned} \omega\delta_0 &= -ikw_0, \\ \omega w_0 &= -ikf_0 - ikb^2\delta_0, \\ -k^2 f_0 &= 4\pi G\rho_0\delta_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.6}$$

Система (9.1.6) имеет нетривиальное решение при условии

$$\omega = \pm\sqrt{4\pi G\rho_0 - b^2k^2}. \tag{9.1.7}$$

---

*) Примерный ход рассуждений таков: обозначим решение системы через $\varphi(t)$, где φ — совокупность величин δ, w, f, σ в определенных соотношениях. В силу линейности и однородности уравнений величина $A\varphi(t)$, где A — постоянный множитель, тоже является решением. С другой стороны, в силу того, что коэффициенты уравнений постоянны, решение допускает также сдвиг по времени: $\varphi(t+\tau)$ также является решением.

Предполагается, что существуют такие решения («собственные» решения), для которых обе группы преобразований дают один и тот же результат $A\varphi(t) = \varphi(t+\tau)$, причем для каждого τ есть свое (одно или несколько) значение A. Такое функциональное соотношение имеет место, если $\varphi = \varphi_0 e^{\omega t}$, $A = e^{\omega\tau}$.

Ясно, что свойства решения критически зависят от знака подкоренного выражения в (9.1.7). При заданных свойствах вещества (ρ_0 и b^2) существует критическое значение $k_{дж}$, определяемое условием $\omega=0$:

$$\left.\begin{aligned} &4\pi G\rho_0-b^2k_{дж}^2=0, \\ &k_{дж}=\frac{1}{b}\sqrt{4\pi G\rho_0}, \quad \lambda_{дж}=\frac{2\pi}{k_{дж}}=b\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.8}$$

Здесь $\lambda_{дж}$ — критическая длина волны, соответствующая критическому значению $k_{дж}$ (индекс «дж» от «джинсовский»).

Рассмотрим отдельно следствия теории гравитационной неустойчивости в случае $\lambda>\lambda_{дж}$ ($k<k_{дж}$) и в случае $\lambda<\lambda_{дж}$ ($k>k_{дж}$).

1) $\lambda>\lambda_{дж}$ ($k<k_{дж}$), величина ω, определяемая (9.1.7), действительна. Возможны два решения: с положительным и отрицательным ω. Существование решения с положительным ω, растущего, как $e^{\omega t}$ ($\omega>0$), означает гравитационную неустойчивость однородного распределения вещества. Из уравнений следует, что при вещественном ω отношение δ_0 к w_0 содержит мнимую единицу i. Как известно, при пользовании комплексными величинами в расчетах, относящихся к действительным переменным, таким, как плотность, давление, скорость, подразумевается, что уравнения удовлетворяются для вещественной части комплексных величин, входящих в расчет. Предположим, что δ_0 выбрано вещественным, и выпишем возрастающее решение в вещественном виде:

$$\left.\begin{aligned} &\rho=\operatorname{Re}\rho_0\left(1+\delta_0e^{\omega t+ikx}\right)=\rho_0\left(1+\delta_0e^{\omega t}\cos\boldsymbol{kx}\right), \\ &\boldsymbol{v}=\operatorname{Re}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}e^{ikx}i\frac{\omega}{k}\delta_0e^{\omega t}\right)=-\frac{\boldsymbol{k}\omega}{k^2}e^{\omega t}\sin\boldsymbol{kx}. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.9}$$

Итак, мнимая единица в отношении между возмущениями плотности и скоростью движения означает, что эти величины сдвинуты по фазе: в местах максимума и минимума плотности равна нулю скорость, в местах максимума модуля скорости равно нулю возмущение плотности. При $\lambda\to\infty$, $k\to 0$ инкремент $\omega\to\sqrt{4\pi G\rho_0}$. Время τ возрастания возмущений в e раз $\left(\tau=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_0}}\right)$ по порядку величины совпадает с космологическим временем, за которое в модели Фридмана плотность изменяется от $\rho=\infty$ до $\rho=\rho_0$:

$$\rho=\frac{1}{6\pi Gt^2}, \qquad t=\frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}},$$

и это не является случайным совпадением.

2) $\lambda<\lambda_{дж}$ ($k>k_{дж}$). В этом случае формулу (9.1.7) лучше переписать в виде

$$\omega=\pm i\sqrt{b^2k^2-4\pi G\rho_0}. \tag{9.1.10}$$

При мнимой частоте ω отношение между возмущением плотности и скоростью вещественное.

После перехода к вещественным физическим величинам это означает, что плотность и скорость имеют одну и ту же фазу, максимум модуля скорости совпадает с максимумом и минимумом плотности. При этом собственное решение имеет характер бегущей волны, скорость движения в направлении распространения пропорциональна возмущению плотности в каждой точке, амплитуда не зависит от времени:

$$\left.\begin{aligned}&\rho=\rho_0\left[1-\delta_0\cos\left(\boldsymbol{kx}-|\omega|t\right)\right],\\&\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{k}\omega}{k^2}\delta_0\cos\left(\boldsymbol{kx}-|\omega|t\right),\\&|\omega|=\sqrt{k^2b^2-4\pi G\rho_0}.\end{aligned}\right\}\qquad(9.1.11)$$

Рассмотрим предельный случай весьма коротких волн $k^2\gg k^2_{\text{дж}}=\frac{4\pi G\rho_0}{b^2}$. В выражении (9.1.10) можно пренебречь величиной $4\pi G\rho_0$ по сравнению с k^2b^2, и решение (9.1.11) переходит в простые звуковые волны, распространяющиеся со скоростью звука.

Итак, главный вывод заключается в том, что для длинноволновых возмущений основную роль играет тяготение, обусловливающее неустойчивость равномерного распределения и существование экспоненциально нарастающих возмущений плотности; давлением в этом случае можно пренебречь.

Для коротковолновых возмущений основную роль играет давление, возмущение плотности сопровождается возмущением давления, которое приводит к распространению акустических волн постоянной амплитуды *). Для коротковолнового возмущения можно пренебречь ролью тяготения, в следующем приближении тяготение меняет скорость звука, но амплитуда остается постоянной, неустойчивость не появляется.

Граница гравитационной неустойчивости определяется условием $\lambda=\lambda_{\text{дж}}$, т. е. длиной волны Джинса. Обычно говорят также о «массе Джинса» — массе, заключенной в объеме $(\lambda_{\text{дж}}/2)^3$:

$$M_{\text{дж}}=\left(\frac{\lambda_{\text{дж}}}{2}\right)^3\rho_0.\qquad(9.1.12)$$

Это наименьшая масса, для которой давление еще не может помешать росту плотности под действием гравитации. Поэтому

---

*) При определенном типе начальных условий решение имеет вид стоячих волн:

$$\rho=\rho_0\left(1+\delta_0\cos(\boldsymbol{kx})\cos\omega t\right),\qquad \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{k}\omega}{k^2}\sin\delta_0(\boldsymbol{kx})\sin\omega t;$$

ниже будет показано, что в космологической задаче получается именно такое решение.

предполагается, что с течением времени однородно распределенное вещество переходит в отдельные объекты (звезды) с массой, не меньшей чем $M_{дж}$ *). Удобно выразить $M_{дж}$ и $\lambda_{дж}$ в астрономических единицах, т. е. в массах Солнца и парсеках:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{дж} &= 27\left(\frac{T\,°\mathrm{K}}{\mu}\right)^{1/2}\left(\frac{\rho_0}{10^{-24}}\right)^{-1/2} пс, \\ M_{дж} &= 33\left(\frac{T\,°\mathrm{K}}{\mu}\right)^{3/2}\left(\frac{\rho_0}{10^{-24}}\right)^{-1/2} M_{\odot}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.1.13)$$

Здесь μ — атомный вес, рассчитанный на одну частицу ($\mu=1$ для нейтрального водорода, $\mu=1/2$ для ионизованного водорода), $\frac{\rho_0}{10^{-24}}=1{,}7n_{\mathrm{H}}$ для нейтрального водорода (n_{H}— плотность числа атомов водорода).

Теория Джинса в том виде, в каком она изложена выше, формально ошибочна, поскольку невозмущенное однородное распределение вещества предполагается стационарным. Между тем в действительности невозмущенное решение должно быть нестационарным, поскольку постоянной плотности ρ_0 соответствует переменный гравитационный потенциал φ. Эту «болезнь» нельзя вылечить, взяв в качестве невозмущенного такое статическое решение, в котором гравитация уравновешена градиентом давления: как подробно показано в ТТ и ЭЗ, такое тело имеет конечную массу и размеры порядка $\lambda_{дж}$, так что к нему теория Джинса неприменима. Однородное распределение плотности должно быть нестационарным, т. е. с зависящей от времени плотностью, с общим расширением (или сжатием).

На первый взгляд нестационарное решение очень сильно отличается от стационарного, которое использовано в теории Джинса. Но, как мы увидим, все же результаты точной теории весьма близки к результатам Джинса. Формально ошибочная теория Джинса является хорошим приближением и помогает пониманию точной, но более сложной теории.

Как следует обобщить теорию Джинса?

1. Учесть зависимость $\rho_0=\rho_0(t)$, причем $\rho_0(t)$ определяется космологическим решением.

2. Учесть, что давление и скорость звука также зависят от времени:

$$P_0=P(\rho_0)=P(\rho_0(t)).$$

*) На какие именно массы (но не меньше чем $M_{дж}$) разобьется среда, зависит от спектра малых начальных возмущений — конкретно об этом говорится далее. Обычно амплитуда возмущения тем больше, чем меньше его масштаб. Поэтому в таком случае среда разбивается на наименьшие массы, которым давление не мешает сгущаться, т. е. на массы в среднем $\sim M_{дж}$. Однако, как мы увидим дальше, в адиабатической теории образования галактик спектр возмущений таков, что возникают объекты со средней массой много больше $M_{дж}$.

3. В ходе расширения длины волн данного элементарного возмущения возрастают так же, как и расстояния между каждой парой частиц: $\rho_0 \sim a^{-3}(t)$, $\lambda \sim a(t)$, $k \sim a^{-1}(t)$.

4. Подставляя ρ, k, b в (9.1.7) и (9.1.10), мы получим $\omega = \omega(t)$. Очевидным обобщением выражения $e^{\omega t}$ является $e^{\int \omega\, dt}$. Это соответствует предположению, что в нестационарном случае возмущения удовлетворяют дифференциальному уравнению вида $\frac{d\delta}{dt} = \omega(t)\,\delta$. В § 3 этой главы точное решение задачи гравитационной неустойчивости однородного вещества сравнивается с результатами, полученными с помощью такого обобщения результатов Джинса; хорошее согласие между ними показывает, что «ошибочная» теория верна по существу.

Б. Энтропийные и вихревые возмущения.

Обратимся к решениям, соответствующим нулевой частоте, т. е. к таким возмущениям, которые вовсе не зависят от времени в джинсовской постановке задачи. Условие $\omega\sigma = 0$ для возмущения энтропии допускает решение $\sigma \neq 0$ при $\omega = 0$. Очевидно, что в отсутствие теплопроводности начальная неравномерность распределения энтропии с течением времени сохраняется, не изменяется. Полное решение с $\omega = 0$ требует также механического равновесия; из уравнения движения получим

$$\delta_0 = -\frac{h^2\sigma}{\rho_0 b^2 - 4\pi G \rho_0^2 k^{-2}}. \tag{9.1.14}$$

При большом k, т. е. при малой длине волны, можно пренебречь вторым членом в знаменателе, т. е. силами тяготения. В этом случае связь δ_0 и σ соответствует простому условию постоянства давления. При учете сил тяготения условие равновесия меняется. Знаменатель обращается в нуль как раз при джинсовском критическом $k_{\text{дж}}$, когда $\omega = 0$ также и для возмущений плотности и скорости, рассмотренных выше в п. А. Можно убедиться, что в задаче с конечными начальными значениями δ_0 и σ при $t = 0$ значения δ_0 при $t \neq \infty$ остаются конечными, хотя при $k \to k_{\text{дж}}$ они и представляются как разность двух бесконечных величин.

Другой тип решения с $\omega = 0$ получается, если вектор скорости $\boldsymbol{v}$ выбрать перпендикулярным волновому вектору, так что $(\boldsymbol{vk}) \equiv 0$. Тогда из уравнений следует $\omega = 0$, можно принять также $\sigma = 0$ (случай $\sigma \neq 0$ был выделен выше) и $\delta_0 = 0$, $f = 0$.

Очевидно, что при $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{k}$ равна нулю дивергенция скорости (в полном соответствии с тем, что плотность остается постоянной при таком движении), но отличен от нуля ротор скорости:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = i\,[\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{k}]. \tag{9.1.15}$$

Поэтому такое движение называется вихревым. При данном направлении k есть два направления, перпендикулярных $\boldsymbol{k}$ и между собой, т. е. два линейно независимых вихревых движения.

Подсчитаем общее число типов возмущений с данным $\boldsymbol{k}$: два продольных с $\omega=\sqrt{4\pi G\rho_0-b^2k^2}$ и $\omega=-\sqrt{4\pi G\rho_0-b^2k^2}$, одно энтропийное и два вихревых — итого пять типов.

Начальное состояние среды характеризуется заданием плотности, энтропии и скорости. Скорость является вектором, т. е. характеризуется тремя компонентами. Следовательно, начальное состояние характеризуется заданием всего пяти величин, что как раз и позволяет однозначно определить амплитуды пяти независимых типов возмущений.

До сих пор рассматривались возмущения с заданной периодической зависимостью от пространственных координат (e^{ikx}); возмущения с произвольной зависимостью от координат нужно сперва разложить в интеграл Фурье (об этом разложении см. ниже, гл. 12). Сейчас продолжим рассмотрение отдельных волн с периодической зависимостью от координат.

§ 2. Неустойчивость расширяющегося однородного вещества

Неустойчивость расширяющегося однородного вещества в ньютоновском приближении была доказана Боннором (1957). В качестве невозмущенного решения он использовал нестационарные изотропные космологические модели Такие модели были рассмотрены в первом разделе. Напомним решение, описывающее эволюцию изотропно расширяющегося однородного вещества. Точное решение невозмущенной системы уравнений (9.1.1) имеет вид

$$\boldsymbol{u}=H(t)\boldsymbol{x},\qquad \varphi_0=\frac{2\pi G}{3}\rho_0(t)x^2,\ \rho=\rho_0(t),\ P=P_0(t).\qquad (9.2.1)$$

Решением (9.2.1) удовлетворены все уравнения, включая уравнение Пуассона, правда, ценой бесконечного потенциала и бесконечной скорости на пространственной бесконечности: $\boldsymbol{x}\to\infty$, $\boldsymbol{u}\to\infty$.

В (9.2.1) $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор, $x^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $H(t)$ и $\rho_0(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho_0}{dt}=-3H\rho_0,\qquad \frac{dH}{dt}+H^2=-\frac{4\pi}{3}G\rho_0.\qquad (9.2.2)$$

Возмущения будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=\delta(t)\,e^{i\boldsymbol{k}(t)\boldsymbol{x}}=\delta(t)\,e^{i\varkappa x/a(t)},\\ &\varkappa=\mathrm{const},\quad \boldsymbol{k}=\frac{\varkappa}{a(t)}\end{aligned}\right\}\qquad (9.2.3)$$