лении $k$ есть два направления, перпендикулярных $\boldsymbol{k}$ и между собой, т. е. два линейно независимых вихревых движения.

Подсчитаем общее число типов возмущений с данным $\boldsymbol{k}$: два продольных с $\omega=\sqrt{4\pi G\rho_0-b^2k^2}$ и $\omega=-\sqrt{4\pi G\rho_0-b^2k^2}$, одно энтропийное и два вихревых — итого пять типов.

Начальное состояние среды характеризуется заданием плотности, энтропии и скорости. Скорость является вектором, т. е. характеризуется тремя компонентами. Следовательно, начальное состояние характеризуется заданием всего пяти величин, что как раз и позволяет однозначно определить амплитуды пяти независимых типов возмущений.

До сих пор рассматривались возмущения с заданной периодической зависимостью от пространственных координат ($e^{ikx}$); возмущения с произвольной зависимостью от координат нужно сперва разложить в интеграл Фурье (об этом разложении см. ниже, гл. 12). Сейчас продолжим рассмотрение отдельных волн с периодической зависимостью от координат.

## § 2. Неустойчивость расширяющегося однородного вещества

Неустойчивость расширяющегося однородного вещества в ньютоновском приближении была доказана Боннором (1957). В качестве невозмущенного решения он использовал нестационарные изотропные космологические модели Такие модели были рассмотрены в первом разделе. Напомним решение, описывающее эволюцию изотропно расширяющегося однородного вещества. Точное решение невозмущенной системы уравнений (9.1.1) имеет вид

$$\boldsymbol{u}=H(t)\,\boldsymbol{x},\qquad \varphi_0=\frac{2\pi G}{3}\rho_0(t)\,x^2,\quad \rho=\rho_0(t),\quad P=P_0(t). \qquad (9.2.1)$$

Решением (9.2.1) удовлетворены все уравнения, включая уравнение Пуассона, правда, ценой бесконечного потенциала и бесконечной скорости на пространственной бесконечности: $\boldsymbol{x}\to\infty$, $\boldsymbol{u}\to\infty$.

В (9.2.1) $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор, $x^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $H(t)$ и $\rho_0(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho_0}{dt}=-3H\rho_0,\qquad \frac{dH}{dt}+H^2=-\frac{4\pi}{3}G\rho_0. \qquad (9.2.2)$$

Возмущения будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=\delta(t)\,e^{i\boldsymbol{k}(t)\boldsymbol{x}}=\delta(t)\,e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{x}/a(t)},\\ &\boldsymbol{\varkappa}=\mathrm{const},\quad \boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{a(t)} \end{aligned}\right\} \qquad (9.2.3)$$

в соответствии с высказанными в конце § 1 этой главы соображениями; длина волны возмущения увеличивается при расширении Вселенной. Для возмущений скорости и гравитационного потенциала запишем:

$$\boldsymbol{v} = w(t)\frac{\boldsymbol{k}}{k}e^{i\boldsymbol{kx}}, \qquad \varphi = \varphi_0 + f(t)\,e^{i\boldsymbol{kx}}; \tag{9.2.4}$$

возмущения скорости предполагаются потенциальными, т. е. $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}$. Невозмущенное движение частицы описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t) = H(t)\,\boldsymbol{x},$$

общее решение которого имеет вид

$$\boldsymbol{x} = a(t)\,\boldsymbol{q},$$

где

$$a(t) = \exp\left(\int H(t)\,dt\right).$$

В релятивистской теории $a(t)$ определяет радиус Вселенной. В нерелятивистской ньютоновской теории $a(t)$ — это масштабный множитель, определяющий изменение расстояния между каждой парой частиц. Абсолютное значение $a(t)$ в ньютоновской теории несущественно, имеет смысл лишь отношение $\frac{a(t_1)}{a(t_2)}$. Величина $\boldsymbol{q}$ есть лагранжева координата, постоянный (не зависящий от времени) вектор $\boldsymbol{\varkappa}$ есть волновой вектор в лагранжевых координатах.

Выше мы предположили, что возмущения имеют вид

$$\delta = \frac{\rho(\boldsymbol{x},\ t) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)} = \delta(t)\,e^{i\boldsymbol{\varkappa q}},$$

и аналогично для скорости и потенциала.

Справедливость этого предположения проверяется непосредственно подстановкой величин $\delta$, $w$, $f$ в основные уравнения. Если учесть, что $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(t)$, $\boldsymbol{\varkappa} = \mathrm{const}$, то окончательно уравнения для величин $\delta$, $w$, $f$ могут быть приведены к виду (множитель $e^{i\boldsymbol{\varkappa q}}$ выпадает из уравнений)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\delta}{dt} = -ikw,\\ &\frac{dw}{dt} + Hw = -i\,\frac{\delta}{k}\,(4\pi G\rho_0 - k^2 b^2),\\ &f = 4\pi G\rho_0\delta/k^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.2.5}$$

Это — система уравнений первого порядка с зависящими от времени коэффициентами $k(t)$, $H(t)$, $\rho_0(t)$, $b(t)$ (индекс при $\rho$ дальше опускаем), которые определяются невозмущенным решением и уравнением состояния газа. При $H \equiv 0$ и $\rho$, $k$, $b = \mathrm{const}$ система

(9.2.5) переходит в уравнения Джинса. Из (9.2.5) легко получить одно уравнение второго порядка:

$$\ddot{\delta}+2H\dot{\delta}-(4\pi G\rho_0-b^2k^2)\,\delta=0. \tag{9.2.6}$$

В общем случае решение и исследование этого уравнения довольно громоздки. Поэтому мы начнем с простейших случаев. Уравнение (9.2.6) сильно упрощается, если предположить $P\sim\rho^{4/3}$, так что скорость звука $b=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2}\sim\rho^{1/6}$. Заметим, что $\rho\sim a^{-3}$, $k^2\sim a^{-2}$. При выбранном уравнении состояния $b^2\sim\rho^{1/3}\sim a^{-1}$ и, следовательно, оба члена в скобках уравнения (9.2.6) пропорциональны $a^{-3}$, т. е. находятся в постоянном отношении. В этом случае для данного сопутствующего объема (для данной массы или для данной системы частиц) отношение внутренней энергии и гравитационной энергии остается постоянным в ходе расширения. Эти же свойства проявляются и в возмущениях.

Сделаем и второе упрощающее предположение — рассмотрим случай «плоской Вселенной», для которого невозмущенное движение описывается формулами

$$\rho=\frac{1}{6\pi Gt^2},\quad a=a_1t^{2/3},\quad k=k_1t^{-2/3},\quad H=\frac{2}{3}t^{-1},\quad b=b_1t^{-1/3}.$$

В этом случае уравнение (9.2.6) приводится к виду

$$t^2\ddot{\delta}+\frac{4}{3}t\dot{\delta}-\left(\frac{2}{3}-b_1^2k_1^2\right)\delta=0. \tag{9.2.7}$$

Это уравнение имеет степенные решения:

$$\delta=\delta_1t^n,\qquad w=w_1t^{n-1/3},$$

где

$$n=-\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}-b_1^2k_1^2}. \tag{9.2.8}$$

Очевидно, решение критически зависит от знака подкоренного выражения в (9.2.8). Этот результат поучительно сравнить с теорией Джинса. Из (9.2.8) следует, что подкоренное выражение для $n$ обращается в нуль (показатель $n$ при этом есть $n=-1/6$) при

$$\lambda_{\text{кр}}=\frac{2\pi}{k_{\text{кр}}}t^{2/3}=\frac{6}{5}2\pi b_1t^{1/3}=\frac{6}{5}2\pi bt. \tag{9.2.9}$$

Для сравнения укажем, что в теории Джинса критическая длина волны определялась формулой $\lambda_{\text{дж}}=\frac{2\pi b}{\sqrt{4\pi G\rho}}$. Подставляя $\rho=\frac{1}{6\pi Gt^2}$, получим

$$\lambda_{\text{дж}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,2\pi bt. \tag{9.2.10}$$

В расширяющейся Вселенной критическая длина волны по порядку величины близка к расстоянию, проходимому звуком за время расширения $bt$ или, точнее, $\int_0^t b\,dt$. Этот результат широко используется ниже. Все различие между точным значением критической длины волны Джинса и приближенным, полученным из теории Джинса заключается в различии множителей $^6/_5=1{,}2$ и $\sqrt{^3/_2}=1{,}225$. Близки и другие выводы точной теории и теории Джинса.

Для $k\ll k_{кр}$ получаем $n_1={}^2/_3$, $n_2=-1$. Обобщая результаты Джинса (как указано в § 1), мы получили бы

$$\delta=e^{\pm\int\sqrt{4\pi G\rho}\,dt}=e^{\pm\sqrt{^2/_3}\ln t}=t^{\pm\sqrt{^2/_3}}.$$

Другому предельному случаю, $k\gg k_{кр}$, в точной теории Боннора соответствуют звуковые волны:

$$\delta=t^{-1/_6\pm ib_1k_1}e^{ikx}=t^{-1/_6}\exp\left(ikx\pm ib_1k_1\ln t\right); \qquad (9.2.11)$$

фазовая скорость совпадает с мгновенной скоростью звука:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{b_1k_1}{|k_1|\,t^{-2/_3}}\frac{d\ln t}{dt}=b_1t^{-1/_3}=b. \qquad (9.2.12)$$

Появление в формуле (9.2.11) множителя $t^{-1/_6}$ легко объяснить с помощью теории адиабатических инвариантов. Согласно этой теории, энергия звуковой волны изменяется пропорционально ее частоте *), $E=\mathrm{const}\cdot\nu$.

Частота $\nu=\frac{b}{\lambda}\sim b_1t^{-1/_3}k_1t^{-2/_3}\sim t^{-1}$; энергия звука в сопутствующем объеме $V$ есть $E\to\rho v^2V\sim\rho V(b\delta)^2\sim(b\delta)^2\sim t^{-2/_3}\delta^2$. Поэтому $\delta^2\sim t^{-1}t^{2/_3}\sim t^{-1/_3}$, $\delta\sim t^{-1/_6}$.

Если при обобщении теории Джинса учесть этот множитель также и для апериодических длинных волн, то получим закон $t^{-1/_6\pm\sqrt{^2/_3}}$, который очень хорошо совпадает с точным решением $t^{2/_3}$, $t^{-1}$ $\left(\text{так как } -\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}65,\ -\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}98\right)$.

В работе Боннора (1957) рассматривалась эволюция со временем не плоских волн, а сферических. Очевидно, это не может изменить результаты линейной теории, так как с помощью набора плоских волн можно построить сферическую волну.

Отметим, наконец, что в общую классификацию возмущений в расширяющейся Вселенной нужно включить также энтропийные и

*) В шутливой статье Парадоксова (1966) «Как квантовая теория помогает понять классическую механику» объясняется, что если $E=Nh\nu$, где $N$ — число квантов в данной волне или в данном возбужденном состоянии осциллятора, то $N=\mathrm{const}$ при медленном изменении параметров.

вихревые возмущения, наподобие того, как это сделано было в теории Джинса (§ 1).

Энтропийные возмущения от времени не зависят, лишь длина волны растет по мере всеобщего расширения:

$$\sigma(\boldsymbol{x},\ t)=\sigma_0 e^{i\boldsymbol{k}(t)\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{k}(t)=\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{a(t)}, \qquad (9.2.13)$$
$$\sigma_0=\mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\varkappa}=\mathrm{const}.$$

Выражения для соответствующего возмущения плотности в общем случае произвольного уравнения состояния достаточно сложно. В принципе начальное возмущение энтропии может вызвать нарастающее возмущение плотности; к этим вопросам мы вернемся позже.

Вихревые возмущения в расширяющейся Вселенной представляют собой такие же возмущения скорости, направленные перпендикулярно волновому вектору, как и в § 1:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)=\boldsymbol{w}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}, \quad (\boldsymbol{w}\boldsymbol{k})=0. \qquad (9.2.14)$$

При этом возмущения всех других величин — плотности, потенциала, энтропии — тождественно равны нулю.

Для амплитуды вихревой скорости получается уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}+H(t)\,\boldsymbol{w}=0.$$

Сопоставляя его с законом расширения

$$\frac{da}{dt}-H(t)\,a=0,$$

получим ответ

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{\boldsymbol{w}_0}{a(t)}, \qquad (9.2.15)$$

где $\boldsymbol{w}_0$ — постоянный вектор, перпендикулярный волновому вектору $\boldsymbol{k}$; величина и направление $\boldsymbol{w}_0$ определяются начальными условиями. Этот результат справедлив при любом законе $a(t)$, в частности и в случае, соответствующем закрытому ($\Omega>1$) или открытому ($\Omega<1$) миру. Для единичной волны, т. е. при отсутствии возмущений другого типа и возмущений с другими волновыми векторами, результат справедлив и при конечной, не малой амплитуде $\boldsymbol{w}_0$.

В следующем параграфе мы вернемся к растущим и затухающим возмущениям плотности, которые сопровождаются продольным движением вещества, $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{k}$. Общий случай произвольного уравнения состояния $P(\rho)$ и не плоской Вселенной приводит к сложным вычислениям и здесь не рассматривается [см. Хантер (1962), Саведов и Вила (1962)]. Ниже будет подробно рассмотрен случай малых $\boldsymbol{k}$ (при этом уравнение состояния в уравнения задачи не входит) и неплоской Вселенной.