§ 3. Крупномасштабные возмущения: автомодельное решение

Полученные выше результаты показывают, что давление не влияет на развитие крупномасштабных возмущений. Этот факт весьма важен и заслуживает более подробного обсуждения.

В рамках метода Фурье уравнения для возмущений плотности δ и произведения $ikw=D$ не зависят от k в пределе $k\to 0$. Следовательно, возмущения любой длины волны с $k\ll k_{\text{дж}}$ развиваются по одному и тому же закону с течением времени. Поэтому в этом случае использование разложения в ряд Фурье является излишним. Точнее, для каждой волны есть два решения [для возмущения плотности и продольной скорости — возрастающее и убывающее ($\delta\sim t^{2/3}$ и $\delta\sim t^{-1}$) в простейшем случае плоского мира]. Поэтому можно предвидеть, что решение уравнений движения вещества с учетом тяготения, но без учета давления, можно будет представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x},\ t) &= \rho_0(t)\left[1+\delta_i(t)\,\psi_i(\boldsymbol{q})+\delta_d(t)\,\psi_d(\boldsymbol{q})\right],\\ D(\boldsymbol{x},\ t) &= -\psi_i(\boldsymbol{q})\,\frac{d\delta_i}{dt}-\psi_d(\boldsymbol{q})\,\frac{d\delta_d}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{9.3.1}$$

Для одной волны произведение ikw равно дивергенции скорости. Мы обобщаем на случай произвольного движения $D=\operatorname{div} w$. Два решения — с индексом i (increasing — растущее) и с индексом d (decreasing — затухающее) — факторизованы, т.е. записаны в виде произведения функции времени на функцию координат. Так как возмущенная область расширяется в ходе общего расширения Вселенной, то факторизация достигается лишь при использовании функций, зависящих от $\boldsymbol{q}$, т. е. от лагранжевых координат, но не от $\boldsymbol{x}$.

Рассматривая дивергенцию скорости D (а не саму скорость $\boldsymbol{v}$), мы отвлекаемся от рассмотрения вихревых возмущений со своим законом зависимости от времени, отличающимся от $\delta_i(t)$ и $\delta_d(t)$. Две функции времени δ_i и δ_d представляют собой решения одного уравнения второго порядка

$$\ddot{\delta}+2H\dot{\delta}-4\pi G\rho\delta=0, \tag{9.3.2}$$

которое совпадает с уравнением (9.2.6), полученным с помощью разложения в ряд Фурье, если в нем положить $k=0$. Это не удивительно, так как, очевидно, $e^{ikx}=e^{i\varkappa q}$ есть частный случай функции $\psi(\boldsymbol{q})$. Уравнение (9.3.2) имеет два линейно независимых решения δ_i и δ_d, например упомянутые $t^{2/3}$ и t^{-1} в простейшем случае модели плоской Вселенной. Поэтому, если в момент $t=t_0$ заданы $\delta(\boldsymbol{x},\ t)$ и $D(\boldsymbol{x},\ t)$, то, вводя $\boldsymbol{q}$ вместо $\boldsymbol{x}$, можно получить два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \delta_i(t_0)\,\psi_i(\boldsymbol{q})+\delta_d(t_0)\,\psi_d(\boldsymbol{q}) &= \delta(t_0,\ \boldsymbol{q}),\\ \dot{\delta}_i(t_0)\,\psi_i(\boldsymbol{q})+\dot{\delta}_d(t_0)\,\psi_d(\boldsymbol{q}) &= -D(t_0,\ \boldsymbol{q}). \end{aligned}\right\} \tag{9.3.3}$$

Решая эти уравнения относительно $\psi_l(q)$ и $\psi_d(q)$, получим

$$\left.\begin{aligned} \psi_l(q) &= \frac{\delta(t_0, q)\,\dot{\delta}_d(t_0) + D(t_0, q)\,\delta_d(t_0)}{\delta_l(t_0)\,\dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_1(t_0)\,\delta_d(t_0)}, \\ \psi_d(q) &= \frac{\delta(t_0, q)\,\dot{\delta}_l(t_0) + D(t_0, q)\,\delta_l(t_0)}{\delta_l(t_0)\,\dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_l(t_0)\,\delta_d(t_0)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.3.4}$$

Например, если при $t=t_0$ вещество покоится, т. е. заданы лишь возмущения плотности, $v(q, t_0)=0$, $D(t_0, q)=0$, то

$$\delta(q, t) = \delta(q, t_0)\,\frac{\delta_l(t)\,\dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_l(t_0)\,\delta_d(t)}{\delta_l(t_0)\,\dot{\delta}_d(t_0) - \dot{\delta}_l(t_0)\,\delta_d(t_0)}. \tag{9.3.5}$$

Следовательно, в этом простейшем случае возмущение нарастает без изменения формы [Дорошкевич, Зельдович (1963)]. Поскольку $\delta_l(t)$ нарастает с течением времени, а $\delta_d(t)$ убывает, то при $t \gg t_0$ $\delta_l(t) \gg \delta_l(t_0)$, $\delta_d(t) \ll \delta_d(t_0)$.

Пренебрегая затухающим решением, получим для вещества, покоящегося в момент t_0:

$$\delta(t, q) = \delta(t_0, q)\,\frac{\delta_l(t)}{\delta_l(t_0)}\left[1 - \left(\frac{d\ln\delta_l}{dt}\Big/\frac{d\ln\delta_d}{dt}\right)_{t=t_0}\right]^{-1}. \tag{9.3.6}$$

В общем случае начальное состояние задается пятью независимыми функциями координат — возмущением плотности, энтропии и тремя компонентами вектора скорости. Однако растущее крупномасштабное решение есть только одно. В общем случае, если начальная амплитуда растущего решения не равна нулю по какой-нибудь специальной причине *), с течением времени растущее решение оказывается больше остальных решений и можно учитывать только это растущее решение.

В зависимости от времени оно нарастает пропорционально δ_l. Пространственное его распределение с течением времени остается подобным самому себе и с помощью формул (9.3.3), (9.3.4) выражается через начальное распределение (при $t=t_0$) скорости и плотности (а в общем случае также энтропии и состава).

§ 4. Возмущения как вариации параметров решения

Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть использованы для построения решения и в более сложных (по сравнению с плоским миром) ситуациях. Выберем начальные возмущения

*) В том случае, если в начальный момент $\delta=0$ и скорость чисто вихревая, $\operatorname{div} v=0$, то амплитуда растущего решения равна нулю в линейном приближении. Таковы предположения вихревой теории образования галактик [Озерной, Чернин (1967, 1968)]. Возмущения плотности зависят от более высоких степеней начальной скорости; для описания наблюдаемой картины необходимы большие начальные скорости к моменту рекомбинации.