Решая эти уравнения относительно $\psi_i(q)$ и $\psi_d(q)$, получим

$$\left.\begin{aligned}\psi_i(q) &= \frac{\delta(t_0, q)\,\dot{\delta}_d(t_0)+D(t_0, q)\,\delta_d(t_0)}{\delta_i(t_0)\,\dot{\delta}_d(t_0)-\dot{\delta}_1(t_0)\,\delta_d(t_0)},\\ \psi_d(q) &= \frac{\delta(t_0, q)\,\dot{\delta}_i(t_0)+D(t_0, q)\,\delta_i(t_0)}{\delta_i(t_0)\,\dot{\delta}_d(t_0)-\dot{\delta}_i(t_0)\,\delta_d(t_0)}.\end{aligned}\right\} \tag{9.3.4}$$

Например, если при $t=t_0$ вещество покоится, т. е. заданы лишь возмущения плотности, $v(q, t_0)=0$, $D(t_0, q)=0$, то

$$\delta(q, t)=\delta(q, t_0)\,\frac{\delta_i(t)\,\dot{\delta}_d(t_0)-\dot{\delta}_i(t_0)\,\delta_d(t)}{\delta_i(t_0)\,\dot{\delta}_d(t_0)-\dot{\delta}_i(t_0)\,\delta_d(t_0)}. \tag{9.3.5}$$

Следовательно, в этом простейшем случае возмущение нарастает без изменения формы [Дорошкевич, Зельдович (1963)]. Поскольку $\delta_i(t)$ нарастает с течением времени, а $\delta_d(t)$ убывает, то при $t\gg t_0$ $\delta_i(t)\gg\delta_i(t_0)$, $\delta_d(t)\ll\delta_d(t_0)$.

Пренебрегая затухающим решением, получим для вещества, покоящегося в момент t_0:

$$\delta(t, q)=\delta(t_0, q)\,\frac{\delta_i(t)}{\delta_i(t_0)}\left[1-\left(\frac{d\ln\delta_i}{dt}\Big/\frac{d\ln\delta_d}{dt}\right)_{t=t_0}\right]^{-1}. \tag{9.3.6}$$

В общем случае начальное состояние задается пятью независимыми функциями координат — возмущением плотности, энтропии и тремя компонентами вектора скорости. Однако растущее крупномасштабное решение есть только одно. В общем случае, если начальная амплитуда растущего решения не равна нулю по какой-нибудь специальной причине *), с течением времени растущее решение оказывается больше остальных решений и можно учитывать только это растущее решение.

В зависимости от времени оно нарастает пропорционально δ_i. Пространственное его распределение с течением времени остается подобным самому себе и с помощью формул (9.3.3), (9.3.4) выражается через начальное распределение (при $t=t_0$) скорости и плотности (а в общем случае также энтропии и состава).

§ 4. Возмущения как вариации параметров решения

Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть использованы для построения решения и в более сложных (по сравнению с плоским миром) ситуациях. Выберем начальные возмущения

*) В том случае, если в начальный момент $\delta=0$ и скорость чисто вихревая, $\operatorname{div} v=0$, то амплитуда растущего решения равна нулю в линейном приближении. Таковы предположения вихревой теории образования галактик [Озерной, Чернин (1967, 1968)]. Возмущения плотности зависят от более высоких степеней начальной скорости; для описания наблюдаемой картины необходимы большие начальные скорости к моменту рекомбинации.

специальным образом: пусть внутри сферы радиуса R возмущения $\delta=\mathrm{const}$, $D=\mathrm{const}$ в момент t_0, т. е. не зависят от координаты. Снаружи возмущения положим равными нулю. Очевидно, внутри сферы справедливо решение, описывающее эволюцию однородной изотропной Вселенной, но с несколько иными параметрами. Внешняя область не влияет гравитационно на внутреннюю область в силу сферической симметрии задачи. Давление также не влияет на динамику расширения, так как возмущения заданы в большом масштабе ($R\gg bt$, где b — скорость звука).

Следовательно, если невозмущенное движение описывается функцией $\rho=\rho(t)$, то для описания возмущения нам необходимо найти близкое решение $\rho_1(t)$ космологических уравнений. Функция $\delta(t)$ определяется как $\delta(t)=[\rho_1(t)-\rho(t)]/\rho(t)$.

Космологические уравнения для $\rho(t)$ содержат t лишь под знаком дифференциала. Поэтому-то один из путей получения решения, близкого к невозмущенному, состоит в том, что производится сдвиг по времени:

$$\rho_1(t)=\rho(t+\tau), \qquad \delta(t)=\tau\frac{d\ln\rho}{dt}=-3\tau H(t). \tag{9.4.1}$$

Постоянный множитель не существен для решения линейного уравнения. Следовательно, одним из решений (убывающим при расширении, δ_d в обозначениях § 3)*) является

$$\delta_d(t)=H(t). \tag{9.4.2}$$

Для того чтобы найти возрастающее решение $\delta_i(t)$, мы сравним невозмущенное решение $\rho(t)$ с решением, отличающимся значением плотности:

$$\rho_1(t)=\rho(t,\ \Omega_1)=\rho(t,\ \Omega+\bar{\omega}). \tag{9.4.3}$$

Выберем решения так, чтобы моменты сингулярности ($\rho=\infty$) для возмущенного решения $\rho_1(t,\ \Omega_1)$ и для невозмущенного решения $\rho(t,\ \Omega)$ совпадали; следовательно, оба решения асимптотически совпадают при $t\to 0$:

$$\rho_1(t,\Omega_1)\approx\rho(t,\ \Omega)\approx\left.\frac{1}{6\pi Gt^2}\right|_{\substack{t\to 0\\ \delta_i\to 0}}.$$

Различие в решениях увеличивается с течением времени. Метод применим и при конечных возмущениях, где различие решений

*) Справедливость этого решения можно проверить непосредственно: мы знаем, что $\dot H+H^2=-\frac{4\pi G}{3}\rho$; продифференцировав это уравнение и использовав соотношение $\frac{d\rho}{dt}=-3H\rho$, получим $\ddot H+2H\dot H=4\pi GH\rho$. Поэтому $\delta=H$ удовлетворяет уравнению $\ddot\delta+2H\dot\delta=4\pi G\delta\rho$, которое совпадает с уравнением (9.3.2).

не мало. Наиболее яркий пример дает случай при $\Omega=1$ для невозмущенного решения и $\bar{\omega}>0$, так что при возмущении плотность больше критической, $\Omega+\bar{\omega}>1$. В этом случае в некоторый момент расширение возмущенной области сменяется сжатием: $\rho_1(t_c)=\infty$ при $t=t_c$, тогда как $\rho(t_c)$ конечно. В случае $\bar{\omega}<0$ при $t\to\infty$ плотность в возмущенной области изменяется по закону $\rho_1\sim t^{-3}$ вместо $\rho=\frac{1}{6\pi G t^2}$ в невозмущенной области. Таким образом, при $\Omega=1$ возмущения любого знака качественно меняют ответ. В линейной теории мы учитываем лишь член первого порядка по $\bar{\omega}$ и ответ имеет следующий вид при произвольном Ω:

$$\delta_i(t)=\frac{\partial}{\partial\Omega}\ln\rho(t,\ \Omega). \tag{9.4.4}$$

Выражение (9.4.4) дает растущее решение уравнения для возмущений. Рассмотрение сферической возмущенной области полезно также для вывода уравнения развития возмущений (9.3.2) иным путем.

Для сферически-симметричного случая можно написать (R — радиус невозмущенного шара, Δ — его возмущение):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{GM}{R^2}, \quad \frac{d^2(R+\Delta)}{dt^2}=-\frac{GM}{(R+\Delta)^2}, \quad \rho=\frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3}, \\ &\frac{d^2\Delta}{dt^2}=\frac{2GM\Delta}{R^3}=\frac{8\pi G}{3}\rho(t)\Delta, \quad \rho_1=\frac{3}{4\pi}\frac{M}{(R+\Delta)^3}, \\ &\delta=-3\frac{\Delta}{R}, \quad R\sim\rho^{-1/3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.4.5}$$

Окончательно имеем формулу

$$\frac{d^2\delta\rho^{-1/3}}{dt^2}=\frac{8\pi G}{3}\delta\rho^{2/3}, \tag{9.4.6}$$

которая может быть преобразована к виду (9.3.2) с помощью уравнений невозмущенного движения. Этот способ нагляднее, чем длинный вывод с помощью фурье-компонент, использованный в § 3.

Рассмотрим подробнее возмущение скорости при изменении плотности внутри заданной сферы радиуса $r<R$. Наружное вещество не действует гравитационно на внутреннее, поэтому внутри возмущенной оболочки имеет место хаббловское расширение с возмущенной функцией $H(t)$. Однако возмущение плотности внутри возмущенной области $r<R$ гравитационно влияет на наружную область $r>R$. В этой области скорость оказывается возмущенной: $u(r)=H_0r+A(t)/r^2$. Таким образом, не совсем точно было бы утверждать, что решение в целом складывается из возмущенной внутренней области и невозмущенной внешней. Однако надо заметить, что возмущение скорости во внешней области такое ($\delta u \sim r^{-2}$), что его дивергенция тождественно равна нулю, т. е. оно не приводит к изменению плотности. Поэтому, если рассматривать только ρ и $\operatorname{div} u$, то внешняя область невозмущена. Когда по величине дивергенции мы находим, обратно, поле скорости (при условии $\operatorname{rot} u=0$, т. е. потенциальную часть скорости), в расчет входят интегралы такие, что $u \neq 0$ там, где $\operatorname{div} u=0$:

$$u = -\operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div} u(r')}{|r-r'|} d^3r'.$$

Поскольку линейная теория развития возмущений в модели Фридмана с уравнением состояния $P=0$ проста и может быть построена непосредственно, то некоторые читатели, возможно, решат, что столь подробный разбор найденного выше автомодельного решения — стрельба из пушек по воробьям. Но это рассмотрение полезно для более широких целей — для понимания нелинейной ситуации и также для более сложных случаев, включая и теорию возмущений в рамках ОТО. Цель настоящего параграфа — дать рабочий инструмент и идеи общих методов, а не просто результаты и готовые формулы.

§ 5. Формулы, описывающие развитие возмущений

Выше были введены величины δ, D, v, выписаны уравнения, которые определяют изменения этих величин, и даны соображения о ходе решений. В этом параграфе мы рассмотрим формулы, описывающие решения этих уравнений в зависимости от времени и от красного смещения z. Произвольные постоянные выбраны так, что $\delta=1$ при $t=t_0$ и $z=0$. Поэтому приведенные формулы позволяют узнать, какими должны были бы быть возмущения при произвольном z для того, чтобы дать $\delta=1$ сегодня.

Масштаб возмущений l_0 приведен как длина волны на сегодняшний день. Принято $k_0=2\pi/l_0$, в формулах использованы H_0 и Ω — постоянная Хаббла и безразмерная плотность сегодня. Поэтому ниже Ω рассматривается как постоянная.

В простейшем случае $\Omega=1$, $t=\frac{2}{3}H_0^{-1}(1+z)^{-3/2}$, $t_0=\frac{2}{3}H_0^{-1}$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_i=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad D_i=-\frac{2}{3t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3}, \quad v_i=-\frac{1}{3\pi}\frac{l_0}{t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3},\\
&\delta_d=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}, \quad D_d=\frac{1}{t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}, \quad v_d=\frac{l_0}{2\pi t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-4/3},\\
&v_r=v_{r0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.5.1)$$