что возмущение скорости во внешней области такое ($\delta u \sim r^{-2}$), что его дивергенция тождественно равна нулю, т. е. оно не приводит к изменению плотности. Поэтому, если рассматривать только ρ и $\operatorname{div} u$, то внешняя область невозмущена. Когда по величине дивергенции мы находим, обратно, поле скорости (при условии $\operatorname{rot} u=0$, т. е. потенциальную часть скорости), в расчет входят интегралы такие, что $u \neq 0$ там, где $\operatorname{div} u=0$:

$$u=-\operatorname{grad}\int\frac{\operatorname{div} u(r')}{|r-r'|}d^3r'.$$

Поскольку линейная теория развития возмущений в модели Фридмана с уравнением состояния $P=0$ проста и может быть построена непосредственно, то некоторые читатели, возможно, решат, что столь подробный разбор найденного выше автомодельного решения — стрельба из пушек по воробьям. Но это рассмотрение полезно для более широких целей — для понимания нелинейной ситуации и также для более сложных случаев, включая и теорию возмущений в рамках ОТО. Цель настоящего параграфа — дать рабочий инструмент и идеи общих методов, а не просто результаты и готовые формулы.

§ 5. Формулы, описывающие развитие возмущений

Выше были введены величины δ, D, v, выписаны уравнения, которые определяют изменения этих величин, и даны соображения о ходе решений. В этом параграфе мы рассмотрим формулы, описывающие решения этих уравнений в зависимости от времени и от красного смещения z. Произвольные постоянные выбраны так, что $\delta=1$ при $t=t_0$ и $z=0$. Поэтому приведенные формулы позволяют узнать, какими должны были бы быть возмущения при произвольном z для того, чтобы дать $\delta=1$ сегодня.

Масштаб возмущений l_0 приведен как длина волны на сегодняшний день. Принято $k_0=2\pi/l_0$, в формулах использованы H_0 и Ω — постоянная Хаббла и безразмерная плотность сегодня. Поэтому ниже Ω рассматривается как постоянная.

В простейшем случае $\Omega=1$, $t=\frac{2}{3}H_0^{-1}(1+z)^{-3/2}$, $t_0=\frac{2}{3}H_0^{-1}$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_i=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad D_i=-\frac{2}{3t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3}, \quad v_i=-\frac{1}{3\pi}\frac{l_0}{t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3},\\
&\delta_d=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}, \quad D_d=\frac{1}{t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}, \quad v_d=\frac{l_0}{2\pi t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-4/3},\\
&v_r=v_{r0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3}.
\end{aligned}\right\}\qquad(9.5.1)$$

Если вместо t использовать красное смещение z, то

$$\left.\begin{aligned} \delta_i&=(1+z)^{-1}, & D_i&=-H_0(1+z)^{1/2}, & v_i&=-\frac{l_0H_0}{2\pi}(1+z)^{-1/2}, \\ \delta_d&=(1+z)^{3/2}, & D_d&=\frac{3}{2}H_0(1+z)^3, & v_d&=\frac{3}{4\pi}H_0l_0(1+z)^2. \end{aligned}\right\} \quad (9.5.2)$$

Наконец, для вихревых возмущений $\delta=0$, $D=0$, а соответствующая скорость

$$v_r=v_{r0}(1+z).$$

Обратимся теперь к случаю $\Omega\neq 1$. Выпишем некоторые формулы, относящиеся к невозмущенному движению:

$$\left.\begin{aligned} a(t)&=a(t_0)(1+z)^{-1}, \\ H(t)&=-(1+z)^{-1}\frac{dz}{dt}=H_0(1+z)\sqrt{1+\Omega z}, \\ H_0dt&=-(1+z)^{-2}(1+\Omega z)^{-1/2}dz. \end{aligned}\right\} \quad (9.5.3)$$

Нормированная затухающая мода возмущений может быть записана в виде

$$\delta_d=(1+z)\sqrt{1+\Omega z}, \quad (9.5.4)$$

в соответствии с упомянутым выше результатом $\delta_d\sim H$, см. (9.4.2).

Для соответствующих возмущений скорости и ее дивергенции имеем

$$\left.\begin{aligned} D_d&=\frac{H_0}{2}(1+z)^2(2+\Omega+3\Omega z), \\ v_d&=\frac{H_0l_0}{4\pi}(1+z)(2+\Omega+3\Omega z). \end{aligned}\right\} \quad (9.5.5)$$

Напомним, что функции, растущие с увеличением z, описывают величины, убывающие с течением времени, поскольку убывает само z.

Нарастающую моду $\delta_i(t)$ или $\delta_i(z)$ нетрудно получить из уравнения (9.2.6); из этого уравнения легко найти, что для любых двух решений $\dot\delta_i\delta_d-\delta_i\dot\delta_d=\frac{\mathrm{const}}{a^2}$. Таким образом, если известно одно решение (δ_d), то для другого имеем

$$\delta_i'=\delta_d\int\frac{dt}{a^2\delta_d^2}=\delta_d\int a^{-2}\delta_d^{-2}\frac{dt}{dz}dz=$$
$$=(1+z)\sqrt{1+\Omega z}\int_z^\infty(1+z)^{-2}(1+\Omega z)^{-3/2}dz. \quad (9.5.6)$$

Интеграл берется в элементарных функциях:

$$\delta_i' = \frac{1+2\Omega+3\Omega z}{(1-\Omega)^2} - \frac{3}{2}\frac{\Omega}{(1-\Omega)^{5/2}}(1+z)\sqrt{1+\Omega z}\ln\frac{\sqrt{1+\Omega z}+\sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z}-\sqrt{1-\Omega}}. \tag{9.5.7}$$

Это выражение не нормировано условием $\delta=1$ при $z=0$; для нормировки его надо умножить на величину

$$\frac{1}{\delta_i(\Omega,\ z=0)} \approx 1 - \frac{3}{2}\Omega\ln\Omega + \frac{3}{7}\Omega + \frac{15}{14}\Omega^2 + \ldots \tag{9.5.8}$$

Это приближенная формула дает правильную асимптотику при $\Omega=1$ и при $\Omega=0$. Таким образом, произведение (9.5.7) [или (9.5.6)] и (9.5.8) дает нормированное $\delta_i(z)$.

Асимптотику при $\Omega\ll 1$ лучше получить непосредственно из интеграла (9.5.6). Для нормированного значения $\delta_i(\Omega,\ z)$ получаем две асимптотики: при $z\gg\frac{1}{\Omega}$ $\delta_i\approx\frac{2}{5}\frac{1}{\Omega z}$, при $z\ll\frac{1}{\Omega}$ $\delta_i\approx 1$. Приближенно можно считать, что δ_i возрастает от $z\gg 1$ до $z_1=\frac{2}{5\Omega}$ по первой асимптотике, а в дальнейшем при $z_1\gg z\gg 0$ δ_i постоянно и равно 1. Соответственно скорость, связанная с возмущениями, сперва растет пропорционально $(1+z)^{-1/2}$, а потом падает пропорционально $(1+z)$. Напоминаем, что выражения «растет» и «падает» относятся к возрастанию времени, т. е. уменьшению z.

Для того чтобы понять такое поведение возмущений, напомним свойства невозмущенной модели. При $\Omega\ll 1$ сегодня (точнее, при $z<z_1$) расширение происходит с почти постоянной скоростью удаления каждых двух заданных частиц, гравитация почти не влияет на невозмущенное движение (см. модель Милна, раздел I). Естественно, что в этот период гравитация не влияет и на развитие возмущений. Поэтому нет и нарастания возмущений, $\delta_i=\mathrm{const}$; естественно, и падение скорости обратно пропорционально радиусу мира.

Идя в прошлое, мы можем записать (u_{12} — относительная хаббловская скорость частиц на расстоянии r_{12}):

$$\rho=\rho_0(1+z)^3, \qquad H(t)=\frac{u_{12}(t)}{r_{12}(t)},$$

где $u_{12}(t)=u_{12}(t_0)$, $r_{12}(t)=\frac{r_{12}(t_0)}{1+z}$; следовательно, $H(t)=H_0(1+z)$ до тех пор в прошлом, пока $\Omega\ll 1$.

Дадим количественное выражение этих общих соображений. Напомним прежде всего закономерности, относящиеся к однородной Вселенной с малой безразмерной плотностью в настоящее время. До конца данного параграфа будем обозначать Ω_0, H_0, a_0 значения, относящиеся к настоящему моменту $z=0$, в отличие от $\Omega(z)$, $H(z)$,

$a(z)$, относящихся к прошлому, характеризуемому красным смещением z.

Итак, выпишем еще раз

$$\left.\begin{aligned} &a(z)=\frac{a_0}{1+z}, \quad H(z)=H_0(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z},\\ &\Omega(z)=\frac{\Omega_0(1+z)}{1+\Omega_0 z}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.5.9)$$

Почти пустая, почти милновская в настоящее время космологическая модель ($\Omega_0 \ll 1$) была почти плоской, почти критической в прошлом ($\Omega \approx 1$). Например, $\Omega_0=0,2$, но в прошлом $\Omega(z=10)=$ $=0,73$, $\Omega(z=30)=0,87$. Соответственно и закон роста возмущений (9.5.6) или (9.5.7) отклоняется от простых законов плоского мира $\delta \sim t^{2/3} \sim (1+z)^{-1}$, $u \sim t^{1/3} \sim (1+z)^{-1/2}$ только при приближении к настоящему времени.

Формулы (9.5.6) и (9.5.7) и соответствующие им формулы для пекулярной скорости неудобны. Можно предложить простую интерполяционную формулу, имеющую удовлетворительную точность во всем интервале z и асимптотически точную при больших z и при $z \to 0$, $\Omega \to 0$, а именно:

$$\delta_i=\left(1+\frac{3}{2}\Omega_0\right)\left(1+\frac{3}{2}\Omega_0+\frac{5}{2}\Omega_0 z\right)^{-1}=\frac{\left(1+\frac{3}{2}\Omega_0\right)}{1-\Omega_0}\,\frac{1-\Omega}{1+{}^3/_2\Omega}. \qquad (9.5.10)$$

Формула для пекулярной скорости (также в растущем со временем типе возмущений) имеет вид

$$v=u_i=(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}\,\frac{d\delta_i}{dz}=\frac{5}{2}\,\frac{\Omega_0\left(1+\frac{3}{2}\Omega_0\right)(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{(1+{}^3/_2\Omega_0+{}^5/_2\Omega_0 z)^2}. \qquad (9.5.11)$$

Пекулярная скорость возмущения достигает максимума [в точном расчете по (9.5.7), а не по (9.5.11)] при $z_{\max 1}=\dfrac{0,38-\Omega_0}{0,62\Omega_0}$.

Можно также поставить вопрос о моменте, когда максимально отношение пекулярной скорости к хаббловской разности скоростей двух частиц, находящихся на расстоянии, равном половине длины волны, $z_{\max 2}=\dfrac{0,26-\Omega_0}{0,74\Omega_0}$.

Соответствующие $z_{\max 1}$ и $z_{\max 2}$ зависят от величины Ω_0, что видно уже из того факта, что при $\Omega_0=1$ пекулярная скорость и отношение ее к хаббловской непрерывно нарастают, максимумов нет. Из общих соображений ясно, что $z_{\max 1}$ и $z_{\max 2}$ всегда, при любом Ω_0, соответствуют [по формуле (9.5.9) для $\Omega(z)$] определенным, не зависящим от Ω_0 значениям:

$$\Omega_{\max 1}=\Omega(z_{\max 1})=0,38, \qquad \Omega_{\max 2}=\Omega(z_{\max 2})=0,26.$$