§ 7. Неустойчивость бесстолкновительного гравитирующего газа

Рассмотрим задачу о возмущениях однородного бесстолкновительного газа [Бисноватый-Коган, Зельдович (1970), Мак-Кон (1971), Магалинский, Сильвестров (1972), Сильвестров (1974)]. Для простоты предположим, что массы всех частиц одинаковы, распределение скорости изотропно. Расчет проведем по методу Джинса: на примере обычного газа (подчиняющегося уравнениям гидродинамики) мы знаем, что некорректность такого рассмотрения (§ 1) не вносит существенных изменений по сравнению с точной теорией.

Итак, к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\delta\rho \tag{9.7.1}$$

добавим определение объемной плотности через плотность в фазовом пространстве. Обозначим через m массу частиц, n — их плотность в фазовом пространстве, r — координаты, $\boldsymbol{v}$ — скорость. Тогда

$$\rho = m\int n(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v})\,d^3v. \tag{9.7.2}$$

Кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}_{(r)}\boldsymbol{v}n + \operatorname{div}_{(v)}\boldsymbol{F}n = 0, \tag{9.7.3}$$

где

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\varphi.$$

Решение ищем в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\Phi = fe^{ikx+\gamma t}, \tag{9.7.4}$$

где Φ — любая из величин $\delta\rho$, $\delta n(\boldsymbol{v})$, φ, $\boldsymbol{F}$.

Соответствующие множители перед экспонентами в (9.7.4) обозначаем теми же буквами, невозмущенные величины отмечаем индексом «0». Получим, сокращая экспоненты,

$$-\delta n(v) = \frac{4\pi G\delta\rho}{k^2}\frac{ikv_x}{\gamma + ikv_x}\frac{2dn_0(v^2)}{d(v^2)} = \frac{8\pi G\,\delta\rho\,(k^2v_x^2 + ikv_x\gamma)}{k^2(\gamma^2 + k^2v_x^2)}\frac{dn_0}{d(v^2)}. \tag{9.7.5}$$

Подставляя (9.7.5) в выражение для плотности

$$\delta\rho = m\int \delta n\cdot d^3v, \tag{9.7.6}$$

получим уравнение для $\gamma(k)$.

В частности, при $k \to 0$ для длинных волн получим

$$\gamma^2 = -8\pi G m \int v_x^2 \frac{dn_0}{d(v^2)} d^3v = 4\pi G\rho, \tag{9.7.7}$$

т. е. тот же результат, что и для обычного газа.
Найдем критическую длину волны из условия $\gamma=0$. Получим

$$k_{\text{дж}}^2 = -8\pi G m \int \frac{dn_0}{d(v^2)} 4\pi v^2 \, dv = 4\pi G\rho \, (\overline{v^{-2}}). \tag{9.7.8}$$

Эта формула также весьма похожа на классический результат Джинса $k_{\text{дж}}^2 = 4\pi G\rho b^{-2}$, где b — скорость звука. Вместо b^{-2} в случае бесстолкновительного газа фигурирует величина, усредненная по распределению в пространстве скоростей:

$$(\overline{v^{-2}}) = \frac{\int \frac{n_0}{v^2} d^3v}{\int n_0 d^3v} = \frac{\int n_0 dv}{\int n_0 v^2 dv}. \tag{9.7.9}$$

В случае максвелловского распределения сравним $(\overline{v^{-2}})$ со скоростью звука и средним квадратом скорости:

$$b^2 = \frac{5}{3}\frac{kT}{m}, \quad \overline{v^2} = 3\frac{kT}{m},$$

т. е. имеем

$$(\overline{v^{-2}}) = \frac{m}{kT} = \frac{3}{5} b^{-2} = \frac{1}{3} (\overline{v^2})^{-1}. \tag{9.7.10}$$

Результаты для обычного газа и бесстолкновительного несколько отличаются. Существенное качественное отличие бесстолкновительного газа, например газа из звезд, возникает лишь на далекой нелинейной стадии, когда обычный газ даст ударную волну, а звезды пройдут друг мимо друга.

В заключение дадим ссылки на работы по возмущениям в бесстолкновительной плазме, важные не для космологической теории развития возмущений, а для теории галактик: Михайловский, Фридман, Эпельбаум (1970), Бисноватый-Коган (1971, 1972а), Михайловский, Фридман (1971, 1973), Бисноватый-Коган, Михайловский (1973), Марочник, Сучков (1974).