

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГОРЯЧЕЙ МОДЕЛИ

§ 1. Условия роста возмущений

В настоящем параграфе соображения, развитые в предыдущей главе, применяются к ранним стадиям расширения, когда вещество полностью ионизовано, плотность излучения много больше плотности вещества и вещество связано с излучением *).

В этот период Вселенная заполнена средой с уравнением состояния $P = \epsilon/3$. Скорость звука $b = c/\sqrt{3}$. В расширяющейся Вселенной $P = \epsilon/3 \sim a^{-4}$ (a — масштабный фактор); для невозмущенного расширения $a = a_0 \sqrt{t}$, $\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2}$ независимо от значения Ω сегодня. Если отношение общей плотности энергии фотонов, нейтрино и гравитонов к плотности энергии фотонов равно g , то $g\sigma T^4 = \rho c^2$, $T = 0,58 \cdot 10^9 g^{-1/4} \rho^{1/4} =$
 $= 1,5 \cdot 10^{10} g^{-1/4} t^{-1/2} = 2,7 (1+z)$. (10.1.1)

Плотность вещества равна

$$\rho_{\text{вещ}} = \Omega \rho_0 (1+z)^3 = \Omega (1+z)^3 10^{-29} \text{ г/см}^3 = 1,7 \Omega g^{-3/4} t^{-3/2}. \quad (10.1.2)$$

С помощью критерия Джинса найдем границу между областями

*) В дальнейшем будут сделаны необходимые уточнения: при $\Omega=1$ есть короткий период, когда плотность вещества больше плотности излучения, хотя вещество еще полностью ионизовано. Гелий рекомбинирует раньше, чем водород. Вещество может считаться сильно связанным с излучением лишь для длин воли больше определенной величины, зависящей от T . В этот короткий период скорость звука

изменяется со временем по закону $b = \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3\rho_{\text{вещ}}}{4\rho_\gamma}\right)^{-1/2}$; плотности вещества и излучения сравниваются при $z=z_1=10^4$, $t=2 \cdot 10^{11} \Omega^{-2}$ сек; закон изменения плотности вещества со временем следует писать в виде $\rho_{\text{вещ}} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{(t-t_0)^2}$,

где $t_0=2 \cdot 10^{11} \Omega^{-2} (1-0,135 \Omega^{1/4})$ сек. Рекомбинация происходит при $z=1400$, $T=3800^\circ \text{ К}$ в момент $t_\gamma=10^{13}$ сек (при $\Omega < 0,07$) или $t_\gamma=5 \Omega^{-1/4} \cdot 10^{12}$ сек (при $\Omega > 0,07$). Более подробно будет рассмотрена и роль слабовзаимодействующих частиц.

устойчивости и неустойчивости. Запишем возмущения в виде

$$\delta = \delta_x(t) e^{ikx},$$

где $k = \kappa a^{-1}(t) = k_0 a^{-1}(t_0) (1+z)$, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{1+z}$ (k_0 и λ_0 относятся к настоящему времени).

Критерий Джинса имеет вид $b^2 k^2 = 4\pi G\rho$; подставляя значения ρ и b , получим

$$k_{\text{дж}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} (ct)^{-1}, \quad \lambda_{\text{дж}} = \frac{2\pi}{k_{\text{дж}}} = ct \frac{4\pi \sqrt{2}}{3}. \quad (10.1.3)$$

Результат, согласно которому джинсовская длина волны $\lambda_{\text{дж}}$ порядка ct (с учетом того, что скорость звука порядка c), очень нагляден: ct есть расстояние, на котором успевает произойти выравнивание плотности за счет перепада давления. Инвариантными характеристиками возмущения (не зависящей от расширения) являются $\lambda_{0\text{дж}}$, $k_{0\text{дж}}$ и $M_{\text{дж}}$. Джинсовская масса определяется как количество вещества (без излучения), содержащееся в объеме $(\lambda_{\text{дж}}/2)^3$. Мы должны выразить эти величины через z и t , используя приведенные выше формулы. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} k_{0\text{дж}} &= \frac{k_{\text{дж}}}{1+z} = 6,3 \cdot 10^{-21} g^{1/4} t^{-1/4} = \\ &= 1,14 \cdot 10^{-30} g^{1/2} (1+z) \text{ см}^{-1}, \\ \lambda_{0\text{дж}} &= 10^{21} g^{-1/4} t^{1/4} = 5,5 \cdot 10^{30} g^{-1/2} (1+z)^{-1} \text{ см}, \\ M_{\text{дж}} &= \rho_0 \left(\frac{\lambda_0}{2}\right)^3 = 0,6 \Omega g^{-3/4} t^{3/4} M_{\odot} = \\ &= 10^{29} \Omega g^{-1/2} (1+z)^{-3} M_{\odot}. \end{aligned} \right\} (10.1.4)$$

Удобно изобразить расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости $\lg t - \lg M$. Мы возьмем за абсциссу $\lg M$ и за ординату $\lg t$. Тогда формула для $M_{\text{дж}}(t)$ изобразится прямой линией на этой плоскости. Легко проверить, что ниже и справа от этой линии лежит область неустойчивости, выше и слева — устойчивости (рис. 43, 44).

Ограничения в области очень малых масс (левый нижний конец прямой $M = M_{\text{дж}}$) сейчас нас не интересуют. При больших t , очевидно, теория справедлива лишь до момента рекомбинации ($t \leq t_{\text{рек}}$, горизонтальная линия на рис. 43, 44). При $\Omega \approx 0,025$ условие $\rho_{\gamma} > \rho_{\text{вещ}}$ выполнено вплоть до $t_{\text{рек}}$; этому случаю соответствует рис. 43 (для $g=2$). При $\Omega=1$ $\rho_{\text{вещ}} = \rho_{\gamma}$ достигается при $z_1 = 2 \cdot 10^4 g^{-1}$. В общем случае произвольного Ω условие $\rho_{\text{вещ}} = \rho_{\gamma}$ достигается при $z_1 = 2 \cdot 10^4 \Omega/g$. В этом общем случае между z_1 и $z_{\text{рек}} = 1400$ (если $z_1 > z_{\text{рек}}$) $M_{\text{дж}} = \text{const}$ и не зависит от z . Эта константа равна $M_{\text{дж}} = 1,2 \cdot 10^{16} g^{3/2} \Omega^{-2} M_{\odot}$. Значению $\Omega=1$ соответствует рис. 44. После рекомбинации вступают в силу соображения предыдущей главы;

критическая джинсовская масса зависит только от давления самого вещества; возмущения плотности нейтрального вещества теперь, при $t > t_{\text{рек}}$, не сопровождаются изменением плотности излучения. Таким образом, при $t < t_{\text{рек}}$ и при $t > t_{\text{рек}}$ существенно различается

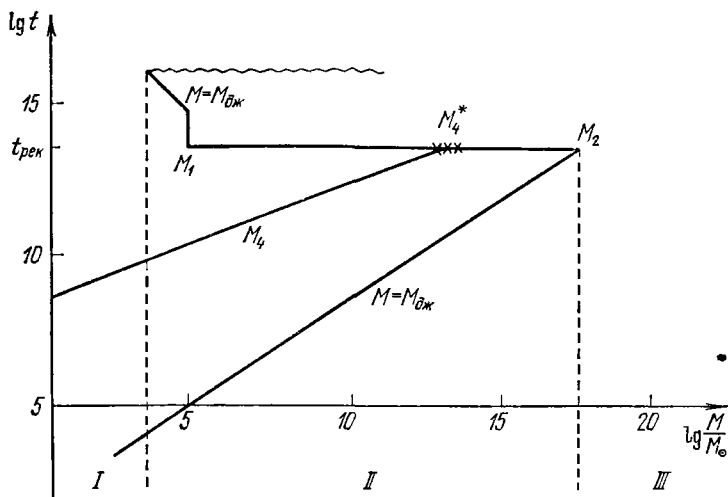


Рис. 43. Расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости $\lg t - \lg M$ при $\Omega = 0,025$. Линия $M = M_{\text{дж}}$ отделяет область устойчивости от области неустойчивости. Линия $M = M_4$ ограничивает область эффективной диссипации возмущений (см. § 2 гл. 10). Массы $M > M_{\text{дж}}$ находятся в области неустойчивости, массы $M < M_{\text{дж}}$ — в области устойчивости, возмущения с массой $M < M_4$ экспоненциально затухают со временем. В период рекомбинации M_4 увеличивается до M_4^* (показано крестиками). Момент рекомбинации $t = t_{\text{рек}}$ совпадает (при $\Omega = 0,025$) с моментом, когда сравниваются плотность вещества и плотность излучения. M_1 — масса Джинса после рекомбинации. Она несколько уменьшается после $t \approx 10^{15}$ сек (см. § 8 гл. 14). Волнистой линией условно обозначен момент вторичного разогрева вещества (см. гл. 14). Остальные обозначения даны в тексте.

сам характер движения, связанный с возмущениями плотности: при $t < t_{\text{рек}}$ сжатие вещества сопровождается сжатием излучения, при $t > t_{\text{рек}}$ нейтральное вещество сжимается на фоне равномерного невозмущенного распределения излучения. Давление излучения больше давления вещества в отношении числа фотонов к числу протонов и электронов (до рекомбинации) или к числу атомов водорода (после рекомбинации), что составляет около $3 \cdot 10^7 / \Omega$. Не удивительно, что в момент, когда выключается влияние излучения на движение вещества, критическая джинсовская длина волны резко падает, в $\sqrt{3 \cdot 10^7 / \Omega}$ раз, а джинсовская масса уменьшается в $(3 \cdot 10^7 / \Omega)^{3/2}$ раз, до величины M_1 порядка $5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_{\odot}$, найденной в предыдущей главе.

Эволюция возмущения данной массы соответствует продвижению вдоль вертикальной линии.

При $M < M_1 \sim 5 \cdot 10^4 \Omega^{-1/2} M_\odot$ (область I на рис. 43 и 44) возмущения, заданные в области неустойчивости, растут только до момента пересечения вертикальной линии с линией, соответствующей $M_{дж}^*$. Позже возмущения всегда остаются в области устойчивости *).

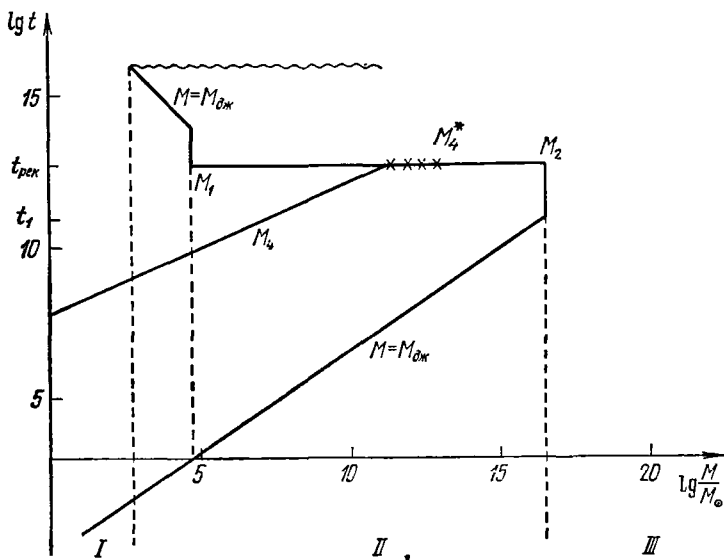


Рис. 44. Расположение областей устойчивости и неустойчивости на плоскости $\lg t - \lg M$ при $\Omega=1$. Обозначения совпадают с рис. 43. В момент $t=t_1$ сравниваются плотность вещества и плотность излучения, в момент $t_{рек} > t_1$ происходит рекомбинация. На интервале $t_1 \leq t \leq t_{рек}$ масса Джинса постоянна.

Для $M_1 < M < M_2$ (область II) возмущения растут от момента сингулярности вплоть до наклонной линии, соответствующей $M_{дж}$. Затем возмущения попадают в область устойчивости. Мы увидим далее, что в этой области происходят колебания постоянной или затухающей амплитуды. Рост возмущений снова продолжается после рекомбинации, когда вертикальная линия пересекает горизонталь $t=t_{рек}$. Наконец, для $M > M_2$ возмущения всегда находятся в области неустойчивости и растут непрерывно.

Важной характеристикой является масса M_2 и соответствующий размер λ_2 (отнесенный к настоящему времени). Для $\Omega=0,025$ $M_2 = 3 \cdot 10^{17} M_\odot$ и $\lambda_2 = 930 Mpc$; для $\Omega=1$ $M_2 = 3,4 \cdot 10^{16} M_\odot$ и $\lambda_2 = 125 Mpc$.

*) Точнее, граница I лежит (на рис. 43 и 44) несколько левее M_1 , так как на поздних этапах расширения $M_{дж}$ уменьшается из-за охлаждения расширяющегося газа (см. § 8 гл. 14).

Эти значения заведомо больше, чем наблюдаемый в настоящее время масштаб сильной неоднородности во Вселенной.

Какова скорость роста возмущений в области неустойчивости и как ведут себя возмущения в области устойчивости в случае радиационно-доминированной плазмы? В области неустойчивости можно пренебречь ролью давления. Поэтому для ответа на первый вопрос используем автомодельную технику. Пусть невозмущенная сфера расширяется согласно уравнению (см. §§ 6, 8 гл. 1)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{B}{R^2}, \quad (10.1.5)$$

т. е. $R = (8B)^{1/4} t^{1/2}$ с плотностью $\rho = \frac{D}{R^4} = \frac{D}{8Bt^2} = \frac{3}{32\pi G t^2}$, так что $B = \frac{4\pi}{3} GD$.

Пусть эволюция возмущенной сферы описывается уравнением, отличающимся от (10.1.5) постоянной α :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR'}{dt} \right)^2 = \frac{B}{(R')^2} + \alpha. \quad (10.1.6)$$

В линейном приближении $\left(\frac{\alpha (R')^2}{B} \ll 1 \right)$ это уравнение решаем методом последовательных приближений:

$$R' = \left(\sqrt{8B} t + \frac{\alpha (R')^4}{4B} \right)^{1/4} = (8B)^{1/4} t^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha (R')^4}{16 \sqrt{2} B^{3/4} t} \right).$$

Справа в члене с α мы заменим R' на невозмущенное значение R из (10.1.5). Получим

$$R' = (8B)^{1/4} t^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha t}{\sqrt{8B}} \right). \quad (10.1.7)$$

Относительные возмущения плотности равны

$$\delta = \frac{\rho' - \rho}{\rho} = -4 \frac{R' - R}{R} = -\frac{4\alpha t}{\sqrt{8B}} = \text{const} \cdot t = \text{const} \cdot (1+z)^{-2}. \quad (10.1.8)$$

Возмущения плотности с длиной волны больше джинсовской (т. е. лежащие в области неустойчивости) растут пропорционально t или $(1+z)^{-2}$, если уравнение состояния $P = \varepsilon/3$ *).

*) Для наиболее жесткого уравнения состояния ($P = \varepsilon$) $z = t^{-1/3}$ и тот же метод дает $\delta \sim t^{1/3} \sim z^{-4}$. В соответствующей таблице на стр. 527 «Релятивистской астрофизики» имеется ошибка. Затухающие возмущения плотности во всех случаях убывают с течением времени, как t^{-1} . Здесь в качестве невозмущенного решения взята плоская Вселенная, возмущение в зависимости от знака α соответствует замкнутой или гиперболической (открытой) космологической модели вблизи сингулярности.

Общая плотность ρ и плотность вещества $\rho_{\text{вещ}}$ связаны нелинейным соотношением $\rho_{\text{вещ}} \sim \rho^{3/4}$. Для малых возмущений тем не менее выполняется линейное соотношение $\delta_{\text{вещ}} = \frac{\rho_{\text{вещ}} - \rho_{\text{вещ}}'}{\rho_{\text{вещ}}} = \frac{3}{4} \delta$ и $\delta_{\text{вещ}}$ растет также пропорционально t . Обоснованием формул (10.1.5) и (10.1.6) является проведенное в разделе I точное релятивистское рассмотрение космологических решений с $P = \epsilon/3$.

В области устойчивости поведение возмущений подобно звуковым волнам. В жидкости с $P = \epsilon/3$ и с постоянной скоростью звука скорость и плотность возмущений связаны соотношением

$$\delta_{\text{вещ}} = \frac{u}{b} = \frac{3}{4} \delta. \quad (10.1.9)$$

Плотность энергии звуковых волн, которая является квадратичной функцией амплитуды, после усреднения на интервале, содержащем много длин волн, запишем в виде

$$\epsilon_{\text{зв}} = 2\rho \frac{u^2}{2} = \frac{9}{16} \delta^2 \rho b^2 = \frac{3\delta^2}{16} \epsilon. \quad (10.1.10)$$

При изменении параметров, медленном по сравнению с частотой колебаний ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} < ct$), в идеальной невязкой жидкости адиабатические инварианты сохраняются. Энергия волнового пакета или звуковая энергия в данном сопутствующем объеме ($V \sim z^{-3} \sim t^{3/2}$) пропорциональна частоте, т. е. $E/\nu = \text{inv}$. Частота равна $b/\lambda \sim z$. Наконец,

$$E = \epsilon_{\text{зв}} V \sim \epsilon_{\text{зв}} z^{-3} \sim \delta^2 \epsilon z^{-3} \sim \delta^2 z \sim b/\lambda \sim z. \quad (10.1.11)$$

Следовательно, амплитуды плотности и скорости возмущений в звуковой волне постоянны до тех пор, пока можно не учитывать затухание из-за диссипативных процессов.

§ 2. Диссипативные процессы и затухание адиабатических возмущений

Вопрос о роли диссипативных процессов в эволюции адиабатических возмущений был впервые рассмотрен Силком (1968). Аналогичные расчеты, проделанные Дорошкевичем (1968), содержатся в его диссертации, но остались неопубликованными.

Простые зависимости и удобные формулы получены Силком для предельного случая, когда плотность излучения больше плотности вещества, $\rho_{\gamma} > \rho_{\text{вещ}}$, длина волны меньше расстояния до горизонта, $\lambda < ct$, длина свободного пробега фотонов существенно меньше ct . Амплитуда возмущений считается малой, т. е. рассматривается линейная теория. В действительности все эти предположения в большей или меньшей степени нарушаются в период вблизи момента