Общая плотность $\rho$ и плотность вещества $\rho_{\text{вещ}}$ связаны нелинейным соотношением $\rho_{\text{вещ}} \sim \rho^{3/4}$. Для малых возмущений тем не менее выполняется линейное соотношение $\delta_{\text{вещ}} = \frac{\rho_{\text{вещ}} - \bar{\rho}_{\text{вещ}}}{\bar{\rho}_{\text{вещ}}} = \frac{3}{4}\delta$ и $\delta_{\text{вещ}}$ растет также пропорционально $t$. Обоснованием формул (10.1.5) и (10.1.6) является проведенное в разделе I точное релятивистское рассмотрение космологических решений с $P=\varepsilon/3$.

В области устойчивости поведение возмущений подобно звуковым волнам. В жидкости с $P=\varepsilon/3$ и с постоянной скоростью звука скорость и плотность возмущений связаны соотношением

$$\delta_{\text{вещ}} = \frac{u}{b} = \frac{3}{4}\delta. \qquad (10.1.9)$$

Плотность энергии звуковых волн, которая является квадратичной функцией амплитуды, после усреднения на интервале, содержащем много длин волн, запишем в виде

$$\varepsilon_{\text{зв}} = 2\bar{\rho}\,\frac{u^2}{2} = \frac{9}{16}\,\delta^2\rho b^2 = \frac{3\delta^2}{16}\,\varepsilon. \qquad (10.1.10)$$

При изменении параметров, медленном по сравнению с частотой колебаний $\left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} < ct\right)$, в идеальной невязкой жидкости адиабатические инварианты сохраняются. Энергия волнового пакета или звуковая энергия в данном сопутствующем объеме $(V \sim z^{-3} \sim t^{3/2})$ пропорциональна частоте, т. е. $E/\nu = \text{inv}$. Частота равна $b/\lambda \sim z$. Наконец,

$$E = \varepsilon_{\text{зв}} V \sim \varepsilon_{\text{зв}} z^{-3} \sim \delta^2 \varepsilon z^{-3} \sim \delta^2 z \sim b/\lambda \sim z. \qquad (10.1.11)$$

Следовательно, амплитуды плотности и скорости возмущений в звуковой волне постоянны до тех пор, пока можно не учитывать затухание из-за диссипативных процессов.

## § 2. Диссипативные процессы и затухание адиабатических возмущений

Вопрос о роли диссипативных процессов в эволюции адиабатических возмущений был впервые рассмотрен Силком (1968). Аналогичные расчеты, проделанные Дорошкевичем (1968), содержатся в его диссертации, но остались неопубликованными.

Простые зависимости и удобные формулы получены Силком для предельного случая, когда плотность излучения больше плотности вещества, $\rho_\gamma > \rho_{\text{вещ}}$, длина волны меньше расстояния до горизонта, $\lambda < ct$, длина свободного пробега фотонов существенно меньше $ct$. Амплитуда возмущений считается малой, т. е. рассматривается линейная теория. В действительности все эти предположения в большей или меньшей степени нарушаются в период вблизи момента рекомбинации; в ряде последующих работ [Пиблс и Ю (1970), Чибисов (1972а), Филд (1973а), Вайнберг (1971)] теория диссипативных процессов была уточнена и численные результаты заметно изменились. Тем не менее полезно сперва рассмотреть элементарную теорию, область применимости которой ограничена перечисленными выше предположениями.

Итак, мы имеем дело со средой с уравнением состояния $P=\varepsilon/3$ и скоростью звука $b=c/\sqrt{3}$; условие $\lambda<ct$ означает также $\lambda<\lambda_{\text{дж}}$, так что можно пренебречь ролью тяготения и рассматривать акустические волны. В макроскопическом рассмотрении причиной затухания звука являются вязкость и теплопроводность среды. В свою очередь вязкость и теплопроводность связаны с диффузией фотонов.

Рассеяние фотонов на электронах определяется формулой Томсона, сечение рассеяния равно

$$\sigma_{\text{т}}=\frac{8\pi}{3}r_{\text{e}}^2=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_{\text{e}}^2c^4}=0{,}665\cdot10^{-24}\ \textit{см}^2.$$

Это сечение не зависит от частоты при $\nu\ll\frac{m_{\text{e}}c^2}{\hbar}$. Рассеянием на протонах можно пренебречь ($m^2$ в знаменателе!). Точно так же при $z<10^8$ можно пренебречь релятивистскими эффектами рождения пар $e^+$, $e^-$ и рассеянием фотонов на фотонах. Следовательно, в интересующей нас области длина пробега

$$l_\gamma=(\sigma_{\text{т}}n_{\text{e}})^{-1}=2{,}5\cdot10^{29}\,\Omega^{-1}z^{-3}\ \textit{см}. \qquad (10.2.1)$$

Для сравнения с другими характерными длинами найдем массу обычной материи в шаре с диаметром $l_\gamma$, обозначим ее $M_{\text{з}}$:

$$M_{\text{з}}=\frac{\pi}{6}l_\gamma^3\rho_{\text{вещ}}=0{,}4\cdot10^{26}\,\Omega^{-2}z^{-6}\,M_\odot. \qquad (10.2.2)$$

На момент рекомбинации эта масса равна

$$M_{\text{з рек}}=0{,}7\cdot10^{7}\,\Omega^{-2}\,M_\odot. \qquad (10.2.3)$$

Итак, для масс меньше $M_{\text{з}}$ при соответствующем $z$ затухание происходит практически мгновенно — достаточно одного свободного пробега фотонов, т. е. интервала меньше периода колебаний для полного затухания. Для больших масс, $M>M_{\text{з}}$, мы вправе применять макроскопические понятия вязкости и теплопроводности, поскольку длина пробега фотонов меньше длины волны возмущения. Затухание за время одного колебания невелико, но это не исключает возможности существенного затухания в космологических условиях, так как при $\lambda\ll ct$ акустическая волна совершает много колебаний за характерное космологическое время.

Кинематическая вязкость $\nu$, т. е. отношение вязкости к плотности $\nu=\eta/\rho$, и температуропроводность $\varphi$, т. е. отношение теплопроводности к теплоемкости единицы объема, имеют одинаковую размерность — ту же, что и коэффициент диффузии. Иногда называют кинематическую вязкость «коэффициентом диффузии скорости», а температуропроводность — «коэффициентом диффузии температуры». В предположениях, сделанных выше *),

$$\nu = \varphi = \frac{1}{3} l_\gamma c = 2{,}5 \cdot 10^{39}\, \Omega^{-1} z^{-3} \ \textit{см}^2/\textit{сек}. \qquad (10.2.4)$$

Составим уравнение для энергии колебания одной монохроматической волны (подразумевается энергия в единице сопутствующего пространства). Волна характеризуется «сопутствующим» волновым вектором $\boldsymbol{k}_0$, связанным с текущим (мгновенным) значением волнового вектора соотношением

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 (1+z). \qquad (10.2.5)$$

В интересующем нас периоде до рекомбинации, $z>1400$, пренебрегаем единицей по сравнению с $z$. Уравнение для энергии имеет вид

$$\frac{d(E/\omega)}{dt} = -\left(\frac{E}{\omega}\right) \nu k^2 = -\left(\frac{E}{\omega}\right) \frac{A}{z}, \qquad (10.2.6)$$

где $A=2{,}5\cdot 10^{39}\Omega^{-1}k_0^2$.

В уравнении (10.2.6) фигурирует отношение $(E/\omega)$ потому, что при расширении без диссипации сохраняется именно эта величина, адиабатический инвариант. Затухание, зависящее от диссипации, приводит к результату

$$\frac{E}{\omega} = \left(\frac{E}{\omega}\right)_0 \exp\left(-A \int_0^t \frac{dt}{z}\right). \qquad (10.2.7)$$

Так как $z \sim t^{-1/2}$, то интеграл сходится; удобно записать

$$\left.\begin{aligned} t &= t_0^* z^{-2}, \quad dt = -2t_0^* z^{-3}\, dz, \\ t_0^* &= \frac{3{,}1}{g^{1/2}} \cdot 10^{19}\ \textit{сек} = 2{,}2 \cdot 10^{19}\ \textit{сек}, \\ \int_0^t \frac{dt}{z} &= \frac{2}{3} t_0^* z^{-3}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.8)$$

Затухание волны определяется всегда последней частью всякого рассматриваемого периода: увеличение длины свободного пробега

*) Заметим, что если плотность обычной материи порядка или больше плотности излучения, но плотность фотонов по-прежнему значительно больше плотности протонов и электронов, то $\nu$ уменьшается в отношении $\dfrac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{вещ}}+\rho_\gamma}$ тогда как $\varphi$ остается без изменения.

фотонов и периода колебаний пересиливает увеличение длины волны.

Выберем в качестве конечного момент рекомбинации и $z=z_{\text{рек}}=1400$ (это возможно лишь при $\Omega\leqslant 0{,}07$, так как тогда $\rho_\gamma\geqslant\rho_{\text{вещ}}$ вплоть до $z_{\text{рек}}$, при больших $\Omega$ необходимо учесть иной характер расширения при $z_1\leqslant z\leqslant z_{\text{рек}}$ и учесть влияние теплопроводности). Интеграл дает определенное число, и ответ имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{E}{\omega}\right)_{\text{рек}}&=\left(\frac{E}{\omega}\right)_0\exp\left(-\frac{2t_0^*A}{3z_{\text{рек}}^3}\right),\\ \delta_{\text{рек}}&=\delta_0\exp\left(-\frac{t_0^*A}{3z_{\text{рек}}^3}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(10.2.9)$$

Величина в экспоненте зависит от длины волны возмущения; удобно от этой зависимости перейти к зависимости от массы, характерной для данной волны:

$$\frac{t_0^*A}{3z_{\text{рек}}^3}=\frac{t_0^*}{3z_{\text{рек}}^3}\,2{,}5\cdot10^{39}\,\Omega^{-1}k_0^2=\frac{k_0^2 10^{49}}{\Omega g^{1/2}}=\left(\frac{M_4}{M}\right)^{2/3},$$

где

$$\left.\begin{aligned}M&=\rho_{\text{вещ}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3=1{,}5\cdot10^{-61}\,\Omega k_0^{-3}M_\odot,\\ M_4&=\frac{4\cdot10^{12}}{\sqrt{\Omega}\,g^{3/4}}M_\odot=\frac{2{,}4}{\sqrt{\Omega}}\,10^{12}\,M_\odot.\end{aligned}\right\}\qquad(10.2.10)$$

(для $\Omega=1$ $M_4=3{,}3\cdot10^{11}\ M_\odot$).

Таким образом, появляется еще одна характерная масса $M_4$; при $M>M_4$ можно пренебречь затуханием, при $M<M_4$ затухание имеет существенное значение, адиабатические возмущения практически исчезают: при $M=0{,}1M_4$ $\exp\left[-(0{,}1)^{-2/3}\right]=10^{-2}$, при $M=0{,}01M_4$ $\exp\left[-(0{,}01)^{-2/3}\right]=4{,}5\cdot10^{-10}$. Поэтому величина $M_3$—масса, при которой затухание происходит за одно колебание,— не играет роли. Любопытно, что по порядку величины длина волны возмущения, затухающего за космологическое время, есть среднее геометрическое длины свободного пробега фотонов и характерной длины $ct$; это видно и сразу из условия

$$\nu k^2\sim\frac{cl_\gamma}{\lambda^2}\sim\frac{1}{t},\quad \lambda^2\sim l_\gamma\cdot ct.\qquad(10.2.11)$$

Соответственно $M_4\sim\sqrt{M_3M_{\text{дж}}}$, где $M_{\text{дж}}$ — джинсовская масса. Весьма интересно отмеченное Силком совпадение характерной массы $M_4$ и массы крупных галактик.

График для $M_4=M_4(t)$ показан на рис. 43 и 44. Однако мы увидим в конце этого параграфа, что в действительности из-за процессов в период рекомбинации эта характерная масса, меньше которой

Кинематическая вязкость $\nu$, т. е. отношение вязкости к плотности $\nu=\eta/\rho$, и температуропроводность $\varphi$, т. е. отношение теплопроводности к теплоемкости единицы объема, имеют одинаковую размерность — ту же, что и коэффициент диффузии. Иногда называют кинематическую вязкость «коэффициентом диффузии скорости», а температуропроводность — «коэффициентом диффузии температуры». В предположениях, сделанных выше *),

$$\nu = \varphi = \frac{1}{3} l_\gamma c = 2{,}5 \cdot 10^{39}\, \Omega^{-1} z^{-3}\ \textit{см}^2/\textit{сек}. \qquad (10.2.4)$$

Составим уравнение для энергии колебания одной монохроматической волны (подразумевается энергия в единице сопутствующего пространства). Волна характеризуется «сопутствующим» волновым вектором $\boldsymbol{k}_0$, связанным с текущим (мгновенным) значением волнового вектора соотношением

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 (1 + z). \qquad (10.2.5)$$

В интересующем нас периоде до рекомбинации, $z > 1400$, пренебрегаем единицей по сравнению с $z$. Уравнение для энергии имеет вид

$$\frac{d\,(E/\omega)}{dt} = -\left(\frac{E}{\omega}\right) \nu k^2 = -\left(\frac{E}{\omega}\right) \frac{A}{z}, \qquad (10.2.6)$$

где $A = 2{,}5 \cdot 10^{39} \Omega^{-1} k_0^2$.

В уравнении (10.2.6) фигурирует отношение $(E/\omega)$ потому, что при расширении без диссипации сохраняется именно эта величина, адиабатический инвариант. Затухание, зависящее от диссипации, приводит к результату

$$\frac{E}{\omega} = \left(\frac{E}{\omega}\right)_0 \exp\left(-A \int_0^t \frac{dt}{z}\right). \qquad (10.2.7)$$

Так как $z \sim t^{-1/2}$, то интеграл сходится; удобно записать

$$\left.\begin{aligned} t &= t_0^* z^{-2}, \quad dt = -2 t_0^* z^{-3}\, dz, \\ t_0^* &= \frac{3{,}1}{g^{1/2}} \cdot 10^{19}\ \textit{сек} = 2{,}2 \cdot 10^{19}\ \textit{сек}, \\ \int_0^t \frac{dt}{z} &= \frac{2}{3} t_0^* z^{-3}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.8)$$

Затухание волны определяется всегда последней частью всякого рассматриваемого периода: увеличение длины свободного пробега

*) Заметим, что если плотность обычной материи порядка или больше плотности излучения, но плотность фотонов по-прежнему значительно больше плотности протонов и электронов, то $\nu$ уменьшается в отношении $\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{вещ}} + \rho_\gamma}$, тогда как $\varphi$ остается без изменения.

фотонов и периода колебаний пересиливает увеличение длины волны.

Выберем в качестве конечного момент рекомбинации и $z=z_{\text{рек}}=1400$ (это возможно лишь при $\Omega\leqslant 0{,}07$, так как тогда $\rho_\gamma\geqslant\rho_{\text{вещ}}$ вплоть до $z_{\text{рек}}$, при больших $\Omega$ необходимо учесть иной характер расширения при $z_1\leqslant z\leqslant z_{\text{рек}}$ и учесть влияние теплопроводности). Интеграл дает определенное число, и ответ имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{E}{\omega}\right)_{\text{рек}}&=\left(\frac{E}{\omega}\right)_0\exp\left(-\frac{2t_0^*A}{3z_{\text{рек}}^3}\right),\\ \delta_{\text{рек}}&=\delta_0\exp\left(-\frac{t_0^*A}{3z_{\text{рек}}^3}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(10.2.9)$$

Величина в экспоненте зависит от длины волны возмущения; удобно от этой зависимости перейти к зависимости от массы, характерной для данной волны:

$$\frac{t_0^*A}{3z_{\text{рек}}^3}=\frac{t_0^*}{3z_{\text{рек}}^3}2{,}5\cdot 10^{39}\,\Omega^{-1}k_0^2=\frac{k_0^2 10^{49}}{\Omega g^{1/2}}=\left(\frac{M_4}{M}\right)^{2/3},$$

где

$$\left.\begin{aligned}M&=\rho_{\text{вещ}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3=1{,}5\cdot 10^{-61}\,\Omega k_0^{-3}M_\odot,\\ M_4&=\frac{4\cdot 10^{12}}{\sqrt{\Omega}\,g^{3/4}}M_\odot=\frac{2{,}4}{\sqrt{\Omega}}10^{12}\,M_\odot.\end{aligned}\right\}\qquad(10.2.10)$$

(для $\Omega=1$ $M_4=3{,}3\cdot 10^{11}\ M_\odot$).

Таким образом, появляется еще одна характерная масса $M_4$; при $M>M_4$ можно пренебречь затуханием, при $M<M_4$ затухание имеет существенное значение, адиабатические возмущения практически исчезают: при $M=0{,}1M_4$ $\exp[-(0{,}1)^{-2/3}]=10^{-2}$, при $M=0{,}01M_4$ $\exp[-(0{,}01)^{-2/3}]=4{,}5\cdot 10^{-10}$. Поэтому величина $M_3$ — масса, при которой затухание происходит за одно колебание,— не играет роли. Любопытно, что по порядку величины длина волны возмущения, затухающего за космологическое время, есть среднее геометрическое длины свободного пробега фотонов и характерной длины $ct$; это видно и сразу из условия

$$\nu k^2\sim\frac{cl_\gamma}{\lambda^2}\sim\frac{1}{t},\quad \lambda^2\sim l_\gamma\cdot ct.\qquad(10.2.11)$$

Соответственно $M_4\sim\sqrt{M_3 M_{\text{дж}}}$, где $M_{\text{дж}}$ — джинсовская масса. Весьма интересно отмеченное Силком совпадение характерной массы $M_4$ и массы крупных галактик.

График для $M_4=M_4(t)$ показан на рис. 43 и 44. Однако мы увидим в конце этого параграфа, что в действительности из-за процессов в период рекомбинации эта характерная масса, меньше которой возмущения диссипируют, вырастает за короткий период рекомбинации до $M_4^* = 10^{13} M_{\odot}$. Это увеличение отмечено на рис. 43 и 44 линией с крестиками.

Можно предполагать, что в начальном спектре возмущений масса $M_4$ не выделена, амплитуда возмущений, соответствующих различным массам, плавно возрастает в сторону малых масс. Однако к моменту рекомбинации диссипативные процессы устраняют все коротковолновые адиабатические возмущения.

В теории первичных адиабатических возмущений обособление объектов с массами меньше $M_4$ может происходить лишь путем последующей фрагментации больших ($M > M_4$) объектов.

Необходимо иметь в виду, что при $\Omega > 0,07$ еще до рекомбинации нарушается условие доминирования излучения. При этом теплопроводность становится важнее вязкости. Далее, сама рекомбинация происходит не мгновенно.

В ходе рекомбинации уменьшается плотность электронов примерно в 10 000 раз при изменении $z$ в 1,5 раза. Длина пробега фотонов пропорциональна $n_e$. Значит, в ходе рекомбинации при изменении $\rho_{\text{вещ}}$ в 3 раза в 10 000 раз увеличивается длина пробега фотонов. Согласно формулам для теплопроводности и вязкости эти величины растут в том же отношении. Затухание акустических волн усиливается — однако усиления затухания в 10 000 раз не происходит!

Дело в том, что начиная с момента, когда длина пробега становится равной длине акустических волн, нельзя пользоваться понятиями вязкости и теплопроводности. Для массы $M = 10^{13} M_{\odot}, \Omega = 1$, $z = z_{\text{рек}}$, это условие достигается при $n_e = 10^2\ см^{-3}$, т. е. при степени ионизации порядка $x = n_e/n_н = 0,01$. Дальнейшее уменьшение степени ионизации уже не приводит к усилению затухания. Характерное время торможения частично ионизованного ($x < 1$) вещества в поле излучения с плотностью энергии $\varepsilon_\gamma$ есть

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{cm_p}{\varepsilon_\gamma \sigma x} = 10^{11} \left(\frac{z_{\text{рек}}}{z}\right)^4 \frac{1}{x}\ сек. \tag{10.2.12}$$

При $x < 0,01$ это время больше космологического. Практически выключается всякое взаимодействие вещества с излучением; поскольку на почти нейтральное (>99%) вещество не действует давление излучения, начинается период движения вещества под действием одних только сил тяготения с начальным распределением плотности и скорости, зависящим от процессов на стадии до рекомбинации.

Итак, характерная масса, меньше которой все адиабатические возмущения затухают к концу периода рекомбинации есть $M_4^* \approx \approx 10^{13} M_{\odot}$ [Чибисов (1972а, б), Пиблс и Ю (1970)]. Эта масса играет фундаментальную роль в теории образования галактик.