Это снова дает

$$\rho\sim a^{-3},\quad V\sim a^3,\quad M=\text{const},\quad u\sim a^{-1}\quad \text{для}\quad P=0,\qquad (10.5.5)$$

$$\rho\sim a^{-4},\quad V\sim a^3,\quad M\sim a^{-1},\quad u=\text{const}\quad \text{для}\quad P=\varepsilon/3.\qquad (10.5.6)$$

Результат $u=\text{const}$ для $P=\varepsilon/3$ можно сравнить с результатом $u=\text{const}$ для звуковых колебаний в случае $P=\varepsilon/3$ (см. § 1 этой главы). Ультрарелятивистский газ с $P=\varepsilon/3$ состоит из частиц (фотонов), движущихся со скоростью света c. При расширении уменьшается энергия частиц, но не их скорость. Это и приводит к результату $M\sim a^{-1}$, $u=\text{const}$ для $P=\varepsilon/3$.

Вязкость первичной плазмы приводит к затуханию вращательных возмущений в малых масштабах. Скорость затухания вращательных движений и звуковых волн может отличаться лишь безразмерным множителем порядка единицы. Поэтому масштаб, в котором вязкость приводит к сильному затуханию вращательных возмущений до рекомбинации, не может сильно отличаться от результатов, полученных Силком (1968) для звуковых волн.

Так обстоит дело, если вплоть до момента рекомбинации излучение доминирует, $\rho_\gamma>\rho_{\text{вещ}}$. В противоположном случае, при $\rho_\gamma<\rho_{\text{вещ}}$, в отсутствие диссипации $\omega\sim a^{-2}$, $u\sim a^{-1}$ — как для частиц; кроме того, кинематическая вязкость уменьшается (см. выше), но звуковые волны затухают также за счет теплопроводности. Вихревые возмущения не сопровождаются изменением плотности и температуры, поэтому теплопроводность на них не влияет.

Вследствие этого при большой плотности, $\Omega\sim 1$, затухают вращательные возмущения лишь с $M<4\cdot 10^{11}\ M_\odot$, тогда как адиабатические возмущения затухают вплоть до $10^{13}\ M_\odot$.

Это обстоятельство выяснил в связи с вихревой теорией Чибисов (1972а, б).

§ 6. Сшивание возмущений при изменении уравнения состояния вещества

Момент рекомбинации сопровождается переходными явлениями в нарастающих возмущениях. Сахаров (1965) отметил, что эти явления приводят к своеобразной периодической зависимости конечной амплитуды возмущений от длины волны. Он рассматривал холодную модель Вселенной. Качественно те же явления имеют место и в горячей модели. Рассмотрим этот эффект в горячей модели. В первом приближении рассматриваем рекомбинацию как происходящую мгновенно и рассмотрим возмущение с длинами волн между длиной волны Джинса для нейтрального газа и длиной волны Джинса в плазме до рекомбинации. Соответствующий интервал масс:

$$M_1=5\cdot 10^4\ M_\odot\leqslant M\leqslant M_2=3{,}4\cdot 10^{16}\ M_\odot.$$

Этот интервал (числа даны для $\Omega=1$) очень широк *). В короткий период времени около момента рекомбинации расширением можно пренебречь, т. е. вернуться к джинсовскому способу рассмотрения возмущений. Растущие и затухающие возмущения экспоненциально зависят от времени; обозначим $\omega=\sqrt{4\pi G\rho_{\text{рек}}}$, где $\rho_{\text{рек}}$ — плотность в момент рекомбинации. До рекомбинации решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= A_k \cos \boldsymbol{kx} \cos(kbt' + \alpha_k), \\ u &= bA_k \sin \boldsymbol{kx} \sin(kbt' + \alpha_k), \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.1)$$

где $b = \frac{c}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{3\rho_{\text{вещ}}}{4\rho_\gamma}\right)^{-1/2}$, а время t' отсчитано от момента рекомбинации, $t' \ll t_{\text{рек}}$.

После рекомбинации

$$\left.\begin{aligned} \delta &= (B_k e^{\omega t'} + C_k e^{-\omega t'}) \cos \boldsymbol{kx}, \\ u &= \left(-\frac{\omega}{k} B_k e^{\omega t'} + \frac{\omega}{k} C_k e^{-\omega t'}\right) \sin \boldsymbol{kx}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.2)$$

Коэффициенты B_k, C_k могут быть найдены приравниванием δ и u в момент $t'=t-t_{\text{рек}}=0$:

$$\left.\begin{aligned} & B_k + C_k = A_k \cos\alpha_k, \quad \frac{\omega}{k}\left(C_k - B_k\right) = bA_k \sin\alpha_k, \\ & B_k = \frac{A_k}{2}\left(\cos\alpha_k - \frac{bk}{\omega}\sin\alpha_k\right) = \\ & = \frac{A_k}{2}\sqrt{1+\left(\frac{bk}{\omega}\right)^2}\cos(\alpha_k+\theta), \\ & \theta = \operatorname{arctg}\frac{bk}{\omega} \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad M \ll M_2. \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.3)$$

В точном решении при учете расширения необходимо заменить $B_k e^{\omega t'}$ на $B_k\left(\frac{t}{t_{\text{рек}}}\right)^{2/3}$ и, соответственно, $C_k e^{-\omega t'}$ на $C_k\left(\frac{t_{\text{рек}}}{t}\right)^{2/3}$:

$$\frac{bk}{\omega} \approx \left(\frac{M_2}{M}\right)^{1/3}. \qquad (10.6.4)$$

Переход t через $t_{\text{рек}}$ сопровождается возрастанием амплитуды плотности в растущей моде B_k после рекомбинации по сравнению с амплитудой плотности в звуковой волне до рекомбинации. Это возрастание по порядку величины равно $0{,}5\,(M_2/M)^{1/3}$, где $M_2 = 3{,}4\cdot 10^{16} M_\odot$ и M — характерная масса рассматриваемого возмущения. Этот рост связан со сшиванием скорости u. Для данного возмущения плотности массовая скорость вещества в звуковой волне больше, чем в растущих возмущениях.

*) Часть интервала $M_1 < M < M_4$ в действительности несущественна, так как в этой части амплитуда волн мала вследствие затухания (см. § 2 этой главы).

Отметим периодическую зависимость конечной амплитуды (при $t > t_{рек}$) B_k от фазы α_k. Эта зависимость определяется множителем $\cos(\alpha_k + \theta)$ в (10.6.3).

Каково происхождение и чем определяется фаза α_k? Чтобы выяснить это, необходимо вернуться к ранним фазам расширения, когда возмущения данного масштаба M были в области неустойчивости, ниже линии $M = M_{дж}$, на рис. 43, 44.

В этот период происходит рост одних и затухание других возмущений. В духе теории малых возмущений в расширяющейся Вселенной рассмотрим лишь нарастающую моду:

$$\delta = D_k t \cos \boldsymbol{kx}, \quad u = -\frac{D_k}{k} \sin \boldsymbol{kx}$$
$$\left(k = k_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/2},\ u \sim t^{1/2}\right). \qquad (10.6.5)$$

Она должна быть сшита со звуковыми колебаниями типа (10.6.1). Момент сшивки определяется условием (см. рис. 44)

$$t_{дж} = t_1 \left(\frac{M}{M_2}\right)^{2/3}. \qquad (10.6.6)$$

В этот момент

$$kb = \sqrt{4\pi G\rho} \approx \sqrt{\frac{3}{8}}\, t_{дж}^{-1}. \qquad (10.6.7)$$

Эти возмущения (10.6.5) сшиваются с решением

$$\left.\begin{aligned} \delta &= A_k \cos \boldsymbol{kx} \cos\left(\int_{t_{дж}}^{t} kb\,dt + \beta_k\right), \\ u &= bA_k \sin \boldsymbol{kx} \sin\left(\int_{t_{дж}}^{t} kb\,dt + \beta_k\right), \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.8)$$

откуда следует определение β_k:

$$\operatorname{tg} \beta_k = -(kbt_{дж})^{-1} = -\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \beta_k = -0{,}55. \qquad (10.6.9)$$

Чтобы найти фазу α_k на момент рекомбинации, необходимо знать рост фазы в течение колебаний, т. е. в интервале от $t_{дж}$ до $t_{рек}$. Для этого учтем изменение длины волны и скорости звука при расширении:

$$\alpha_k = \beta_k + \int_{t_{дж}}^{t_{рек}} bk\,dt, \quad k = \varkappa t^{-1/2}, \quad \varkappa = \mathrm{const}, \quad b = \frac{c}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\rho_{вещ}}{\rho_\gamma}\right)^{-1/2}. \qquad (10.6.10)$$

Окончательно получаем

$$\alpha_k = -0{,}55 + 6{,}6\left(\frac{M_2}{M}\right)^{1/6} \approx 2\pi\left(\frac{M_2}{M}\right)^{1/6} - \frac{\pi}{6}. \qquad (10.6.11)$$

Важно, что α_k зависит от длины волны возмущения, определяемой инвариантом k_0 или массой M. Если начальные возмущения задавать в виде гладкой функции $D_k(k_0)$ [или $D_k(M)$], то конечная амплитуда растущей моды в нейтральном газе имеет вид

$$A_k(M) = \mathrm{const}\cdot D_k(M)\, M^{1/6} \cos\left[2\pi\left(\frac{M_2}{M}\right)^{1/6} - \frac{\pi}{6}\right]. \qquad (10.6.12)$$

Она промодулирована последним множителем, который и описывает колебания [Сахаров (1965)]. Грубо говоря, когда начальная стадия нарастания (при $t < t_{\text{дж}}$) возмущений прерывается колебаниями ($t_{\text{дж}} \leqslant t \leqslant t_{\text{рек}}$) и рост продолжается после рекомбинации ($t > t_{\text{рек}}$), то конечная амплитуда возмущений велика, если в интервале $t_{\text{дж}} - t_{\text{рек}}$ укладывается целое число полуволн, и равна нулю, если укладывается полуцелое число полуволн. Нули амплитуды соответствуют следующим масштабам:

$$\frac{M}{M_2} = 0{,}42;\ 0{,}166;\ 0{,}08;\ 0{,}044;\ 0{,}027;\ 0{,}0176;\ 0{,}012;$$
$$0{,}009;\ 0{,}0065:\ 0{,}005 \text{ и т. д.} \qquad (10.6.13)$$

Конечно, все числа даны грубо, но очень важно, что периодическая модуляция амплитуды вплоть до нуля есть точный результат *).

Необходимо пояснить еще одну тонкость. Колебания были взяты в виде стоячих волн:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= A_k \cos \boldsymbol{kx} \cos(kbt + \alpha_k), \\ u &= bA_k \sin \boldsymbol{kx} \sin(kbt + \alpha_k). \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.14)$$

Стоячие волны принципиально отличаются от бегущих волн, имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} \delta &= A_k \cos(\boldsymbol{kx} - bkt - \alpha_k), \\ u &= bA_k \cos(\boldsymbol{kx} - bkt - \alpha_k) \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.15)$$

или, в комплексной форме,

$$\delta = A_k e^{i\boldsymbol{kx} - ikbt - i\alpha}, \quad u = b\delta.$$

Для бегущих звуковых волн амплитуда растущей моды после рекомбинации имела бы вид

$$B'_k = A_k \sqrt{1 + \left(\frac{kb}{\omega}\right)^2}$$

без модуляции **). Если различие между стоячими и бегущими волнами столь велико, то почему же мы работаем со стоячими вол-

*) Результаты машинного расчета см. Пиблс и Ю (1970).

**) Пространственная фаза нарастающей моды $\delta(x)$ после рекомбинации сдвинута, что, однако, не влияет на приведенное выше значение амплитуды.

нами? Ответ состоит в том, что при переходе от области нарастания возмущений при $t < t_{дж}$ к звуковым волнам при $t > t_{дж}$ мы получаем именно стоячие волны *) без каких-либо независимых допущений.

В связи с явлением модуляции необходимо отметить следующее. Мы нашли амплитуду простой единичной моды (амплитуду фурье-компоненты) с определенным инвариантным волновым числом $\varkappa = ak$. Для удобства мы ввели вместо $\varkappa$ переменную размерности массы, связанную с $\varkappa$ (вернее, с k) соотношением $M = \rho_{вещ}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 = \pi^3\rho_{вещ}k^{-3}$. Эта масса M инвариантна (не зависит от времени), так как $\rho_{вещ} \sim a^{-3}$. Однако не следует думать, что спектр масс астрономических объектов может непосредственно отражать найденные колебания. Имеются другие процессы (тепловые, гравитационной неустойчивости), которые искажают влияние начального спектра на спектр масс астрономических объектов. Особенно сильнó это влияние на найденные колебания. Эти вопросы более подробно рассмотрены в следующих главах.

Модуляция не может быть сильной для энтропийных возмущений, которые практически не вызывают движения вещества до рекомбинации. В этом случае просто $B_k = A_k/2$. Поэтому, в принципе, если подробное изучение спектра возмущений в области 10^{15}—10^{18} $M_\odot$ покажет присутствие модуляций или, наоборот, докажет отсутствие модуляций, то такой результат позволит выбрать между адиабатическими и энтропийными начальными возмущениями.

Недавние детальные расчеты Чибисова (1972а, б) (с учетом периода, когда $\rho_{вещ}$ и ρ_γ близки между собой, и с учетом немгновенной рекомбинации) показали, что определенная модуляция — не достигающая, однако, 100% — имеет место и в случае энтропийных возмущений. Для адиабатических возмущений принципиально при любых параметрах (Ω, время рекомбинации и т. п.) есть серия длин волн, для которых теория предсказывает точное равенство нулю амплитуды получающихся позже нарастающих возмущений, иначе говоря, для адиабатических возмущений имеет место 100%-ная глубина модуляции колебаний.

К сожалению, до сих пор нет никаких определенных данных (кроме неравенств), касающихся амплитуды возмущений. С учетом всех трудностей неясно, удастся ли когда-нибудь выяснить по модуляции природу начальных возмущений.

---

*) Если мы работаем в комплексной форме, то необходимо использовать условие вещественности $A_k^* = A_{-k}$.