ГЛАВА II

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ОТО

§ 1. Общие принципы и уравнения

Для полного и точного описания развития возмущений с длиной волны λ больше или порядка ct в жидкости с $P=\varepsilon/3$ необходимо пользоваться общей теорией относительности (ОТО). Некоторые выводы о законах развития адиабатических возмущений были получены в предыдущей главе без использования ОТО, однако строгое обоснование этих результатов будет дано ниже. В рамках ОТО может быть достигнуто более глубокое понимание свойств вращательных возмущений. Только в ОТО возникают возмущения, связанные с гравитационными волнами.

Вопросы развития возмущений в ОТО были весьма полно проанализированы в классической работе Лифшица (1946), позже обзор этого вопроса дан в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б). Задача ставилась следующим образом. В качестве невозмущенного решения берется однородная изотропная модель Фридмана. Тензор энергии-импульса материи считается гидродинамическим: $T_{ik}=(\varepsilon+P)u_iu_k-g_{ik}P$ *). Плотность энергии и давление связаны уравнением состояния: $P=P(\varepsilon)$. В невозмущенном решении материя покоится относительно системы отсчета и компоненты 4-скорости равны $u^0\equiv1$, $u^\alpha\equiv0$. Задаются малые «возмущения» модели, т. е. возмущается метрический тензор $g_{ik}^{(1)}=g_{ik}^{(0)}+h_{ik}$ ($g_{ik}^{(0)}$ — невозмущенный тензор, h_{ik} — возмущения) и тензор энергии-импульса $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon^{(0)}+\delta\varepsilon$, и задаются малые скорости u^α (u^0 определяется из тождества $u^iu_k=1$). Эти выражения подставляются в уравнении Эйнштейна, которые связывают между собой возмущения h_{ik}, $\delta\varepsilon$, u^α и определяют их эволюцию во времени.

Эта задача является типичной задачей Коши; надо задать начальные возмущения и, решая систему уравнений, проследить их эволюцию во времени.

Здесь необходимы следующие пояснения. Первое пояснение касается задания начальных возмущений. В фиксированный момент

---

*) Латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, греческие —1, 2, 3. Индекс «0» относится к координате времени.

времени $t_0=\mathrm{const}$ возмущения h_{ik}, $\delta\varepsilon$, u^α не могут быть заданы все независимо друг от друга произвольным образом. Уравнения Эйнштейна накладывают на начальные значения $(h_{ik})_0$, $(\delta\varepsilon)_0$, $(u^\alpha)_0$ определенные связи. Это соответствует тому факту, что и в общем случае теории относительности начальные значения $(g_{ik})_0$ и $(T_{ik})_0$ не независимы, а подчиняются связям, даваемым уравнениями ОТО. Физическая причина существования таких связей заключается в том, что распределение материи (тензор T_{ik}) определяет создаваемое ею гравитационное поле. Но задание g_{ik} также позволяет вычислить гравитационное поле. Следовательно, g_{ik} не может быть задано независимо. Конечно, в ОТО помимо гравитационного поля, зависящего от материи, т. е. от T_{ik}, есть еще и свободное поле (гравитационные волны). Поэтому g_{ik} определяется по T_{ik} не полностью. В классической ньютоновской теории связи между T_{ik} и g_{ik} соответствует уравнение Пуассона $\Delta\varphi=4\pi G\rho$, которое позволяет по распределению материи (плотности вещества ρ) найти гравитационный потенциал φ*). Мы не останавливаемся здесь подробно на связях между начальными значениями $(g_{ik})_0$ и $(T_{ik})_0$. Математическая сторона дела разобрана, например, в книге Петрова (1966). В нашей задаче необходимые формулы будут приведены в конце параграфа. Отдельные уточнения мы сделаем позже.

Второе пояснение касается выбора системы координат и связанного с этим вопроса о физической трактовке полученных результатов.

В ОТО выбор системы координат произволен. Это вносит серьезные проблемы в правильную интерпретацию результатов. Приведем пример. Пусть мы никак не меняем космологическую модель Фридмана, но рассматриваем ее не в общепринятой сопутствующей системе, а в некоторой другой. Выберем эту другую систему так, чтобы она с течением времени все больше отклонялась от сопутствующей. В формальном решении мы будем видеть, что h_{ik}, $\delta\varepsilon$ и u^α нарастают и решение все больше «уходит» от фридмановского. Ясно, что в таком «уходе» нет никакой физики, «уход» связан с неудачным выбором системы отсчета. Здесь избавиться от такой «нефизической неустойчивости» легко — надо вернуться к фридмановской системе отсчета. А что делать в том случае, когда фридмановское решение имеет действительные физические возмущения? Как отделить физические отклонения от подобных рассмотренных выше координатных отклонений?

Одним из возможных способов является выбор сопутствующей системы отсчета в возмущенных решении, т. е. выбор системы,

---

*) Подчеркнем, что в ньютоновской теории гравитационное поле создается только плотностью вещества ρ, в то время как в ОТО оно зависит и от ρ и от P, u^i. Если не ставить условия $\rho=0$, $\varphi=0$ на пространственной бесконечности, то и в ньютоновской теории остается произвол, к φ можно добавить решение для пустоты $\Delta\varphi=0$.

в которой вещество покоится, $u^\alpha \equiv 0$. Действительно, нас интересуют свойства расширяющегося вещества. Если в сопутствующей веществу системе физические величины (но не координатные, так как в выбранной системе отсчета можно еще по-разному выбирать пространственные координаты, например сферические или цилиндрические, и по-разному отсчитывать время; см. ТТ и ЭЗ) мало отличаются от соответствующих величин в решении Фридмана, то, значит, с физической точки зрения возмущения малы.

Лифшиц (1946) и его многочисленные последователи пошли несколько иным путем. Выбиралась для исследования возмущений синхронная система отсчета, в которой $g_{00} \equiv 1$ и $g_{0\alpha} \equiv 0$. После получения решения для возмущений в этой системе отсчета (которая также определяется еще не однозначно!) можно проанализировать его, варьируя системы координат, и выяснить, какая часть возмущения является физической, т. е. описывает изменение распределения плотности в сопутствующей системе, изменение характера деформации среды, появление в ней сил ускорения и абсолютного вращения (математический аппарат для описания этих величин см. в ТТ и ЭЗ). Анализ позволяет отбросить «нефизические» моды.

Мы будем следовать методу Лифшица *). Прежде чем переходить к выводу формул, сделаем еще следующее замечание. В работе Лифшица (1946) состояние вещества описывалось гидродинамическим тензором T_{ik}. Однако свойства вещества определяются не только механическими величинами — плотностью и давлением. Существуют еще такие величины, как, например, состав; при высокой температуре и плотности, когда все процессы достигают термодинамического равновесия, состав характеризуется заданием сохраняющихся величин — «зарядов»: барионного заряда, лептонных зарядов — и плотности энтропии. Кроме того, с учетом вязкости и слабовзаимодействующих «свободных» частиц «гидродинамический» тензор T_{ik} не является наиболее общим! Тем не менее в рамках линейной теории есть основания думать, что результаты Лифшица о росте возмущений не изменятся качественно, да и количественные изменения, вероятно, не превысят 30%.

В нелинейном приближении можно ожидать важных изменений. Например, при наличии частиц с большой длиной пробега, в принципе, возможно нарушение теоремы Гельмгольца и появление вихревых составляющих скорости в первоначально безвихревой жидкости. Таким образом, в связи с развитием теории горячей Вселенной возникли новые проблемы и в теории гравитационной неустойчивости в ОТО. Однако значение классических результатов при этом не уменьшилось. С их изложения мы начнем.

Мы будем рассматривать возмущения в областях пространства, которые могут быть велики по сравнению с ct, но малы по сравнению

*) Иной подход см. Хоукинг (1966а).

с радиусом кривизны пространства a в рассматриваемый период. На ранних стадиях эволюции, как мы знаем (см. гл. 2), всегда $a \gg ct$. Принятые условия эквивалентны тому, что мы будем рассматривать возмущения в плоском мире с критической плотностью вещества. Полученные результаты достаточны для нашей ближайшей цели — анализа возможных путей развития галактик. Общий случай (когда длина волны возмущения не мала по сравнению с a) рассмотрен все в той же замечательной работе Лифшица (1946).

В плоском мире, $\rho=\rho_c$, возмущения «раскладываются» по плоским волнам подобно возмущениям в ньютоновской теории. Итак, в случае однородной и изотропной модели Вселенной (модель Фридмана) с плоским сопутствующим пространством запишем:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\,\delta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = a^2(\eta)\,(d\eta^2 - \delta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta). \qquad (11.1.1)$$

Здесь последнее равенство получено заменой координаты времени $c\,dt \to a\,d\eta$. Невозмущенное решение получено нами выше, в § 1 гл. 2. Мы будем работать в метрике с координатным временем η. В невозмущенном решении вещество покоится, $u^0 = \frac{1}{a(\eta)}$, $u^\alpha = 0$ (невозмущенная система отсчета является и синхронной и сопутствующей). Наиболее общие малые возмущения метрики задаются добавлением $h_{lm}\,dx^l dx^m\,(\eta \equiv x^0)$, но с помощью преобразования координат всегда можно вернуться к синхронной метрике, т. е. к метрике, не содержащей перекрестных членов вида $dx^0 dx^\alpha$, и с $g_{00}=1$. Возмущения остаются лишь в пространственной части метрики:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\,\delta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta - h_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta =$$
$$= a^2(\eta)\left[d\eta^2 - \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{h_{\alpha\beta}}{a^2(\eta)}\right)dx^\alpha\,dx^\beta\right]. \qquad (11.1.2.)$$

В формулах (11.1.2) возмущенная метрика задана в синхронной системе отсчета, но эта система отсчета, вообще говоря, с учетом $h_{\alpha\beta}$ уже не является сопутствующей. Все расчеты мы проводим в линейном приближении, $h_{\alpha\beta}$ — величины первого порядка малости, Кроме того, возникают пространственные компоненты скорости и возмущения плотности. Отклонения u^0 от единицы и нарушение равенств $T_0^0=\varepsilon$ и $T_\alpha^\beta=-P\delta_\alpha^\beta$ возможны лишь во втором порядке, поскольку они пропорциональны произведению $u_\alpha u^\beta$. Используя невозмущенную метрику для поднятия и опускания индексов, получим (это есть определение величин h_α^β со смешанными индексами)

$$h_\alpha^\beta = h_\beta^\alpha = \frac{1}{a^2}\,h_{\alpha\beta}. \qquad (11.1.3)$$

Смешанные компоненты h_α^β (включая $\alpha=\beta$) безразмерны, они определяют величину возмущений метрики в том смысле, что если

$h_\alpha^\beta \ll 1$, то мало возмущение метрики (этого нельзя сказать о размерных $h_{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta}$).

Условия синхронности не определяют системы координат полностью, так как существуют преобразования координат, оставляющие систему координат синхронной. Этот произвол дает возможность появления указанных выше нефизических добавок в h_α^β, $\delta\varepsilon$, u^α. Подставляя $g_{00}=a^2$, $g_{0i}=0$, $-g_{\alpha\beta}=a^2\delta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$ из (11.1.2) и $T_{ik}=T_{ik}^{(0)}+\delta T_{ik}$ в уравнения Эйнштейна, мы получаем систему уравнений для возмущений, которая может быть записана в синхронной системе в следующем виде [Лифшиц и Халатников (1963а, б)]:

$$\frac{1}{2}\left(h_{\gamma,\delta}^{\delta,\gamma}-h_{,\gamma}^{;\gamma}\right)\left(1+3\frac{dP}{d\varepsilon}\right)+\ddot{h}+\dot{h}\frac{\dot{a}}{a}\left(2+3\frac{dP}{d\varepsilon}\right)=0, \quad (11.1.4)$$

$$\left(h_{\alpha,\gamma,}^{\gamma,\beta}+h_{\gamma,\alpha}^{\beta,\gamma}-h_{;\alpha}^{;\beta}-h_{\alpha,\gamma}^{\beta,\gamma}\right)+\ddot{h}_\alpha^\beta+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha^\beta=0 \qquad (\alpha\neq\beta), \quad (11.1.5)$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{c^2}{16\pi G\varepsilon a^2}\left(h_{\alpha,\beta}^{\beta,\alpha}-h_{,\alpha}^{;\alpha}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}\right), \quad (11.1.6)$$

$$\frac{u^\alpha}{c}=\frac{c^2}{16\pi G}\frac{\left(h^{,\alpha}-h_\beta^{\alpha,\beta}\right)^{\cdot}}{a^2(P+\varepsilon)}. \quad (11.1.7)$$

Точка обозначает $\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial\eta}$, $h=h_\alpha^\alpha$. Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате. Здесь и далее в этом разделе u^α — компоненты физической (не координатной!) скорости. В данном приближении этих уравнений достаточно для определения эволюции возмущений, разложенных по плоским волнам в трехмерном пространстве с евклидовой метрикой. При этом (11.1.4) получается из уравнения для $R_{\alpha\alpha}$, (11.1.5) — для $R_{\alpha\beta}$, (11.1.6) — для R_{00} и (11.1.7) — для $R_{0\alpha}$.

§ 2. Классификация возмущений

Решение уравнений (11.1.4) — (11.1.7) для плоских волн возмущения ищем в следующем виде. Сначала по уравнениям (11.1.4), (11.1.5) находим $h_{\alpha\beta}$, а затем уже элементарными вычислениями по (11.1.6) и (11.1.7) находим $\delta\varepsilon$ и u^α.

Возмущения рассматриваются на фоне пространственно-однородной и изотропной, но эволюционирующей Вселенной. Следовательно, решения, относящиеся к «элементарным», «собственным», «фундаментальным» возмущениям (на которые раскладываются произвольные возмущения), должны обладать инвариантностью относительно тех преобразований, относительно которых тождественно инвариантно невозмущенное решение.

Одно преобразование, вытекающее из однородности пространства, есть сдвиг пространственных координат. В нерелятивистской