$h^\beta_\alpha \ll 1$, то мало возмущение метрики (этого нельзя сказать о размерных $h_{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta}$).

Условия синхронности не определяют системы координат полностью, так как существуют преобразования координат, оставляющие систему координат синхронной. Этот произвол дает возможность появления указанных выше нефизических добавок в h^β_α, $\delta\varepsilon$, u^α. Подставляя $g_{00}=a^2$, $g_{0i}=0$, $-g_{\alpha\beta}=a^2\delta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$ из (11.1.2) и $T_{ik}=T_{ik}^{(0)}+\delta T_{ik}$ в уравнения Эйнштейна, мы получаем систему уравнений для возмущений, которая может быть записана в синхронной системе в следующем виде [Лифшиц и Халатников (1963а, б)]:

$$\frac{1}{2}\left(h^{\delta,\,\gamma}_{\gamma,\,\delta}-h^{,\gamma}_{,\gamma}\right)\left(1+3\frac{dP}{d\varepsilon}\right)+\ddot{h}+\dot{h}\frac{\dot{a}}{a}\left(2+3\frac{dP}{d\varepsilon}\right)=0, \quad (11.1.4)$$

$$\left(h^{\gamma,\,\beta}_{\alpha,\,\gamma}+h^{\beta,\,\gamma}_{\gamma,\,\alpha}-h^{,\beta}_{,\alpha}-h^{\beta,\,\gamma}_{\alpha,\,\gamma}\right)+\ddot{h}^\beta_\alpha+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}^\beta_\alpha=0 \qquad (\alpha\neq\beta), \quad (11.1.5)$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{c^2}{16\pi G\varepsilon a^2}\left(h^{\beta,\,\alpha}_{\alpha,\,\beta}-h^{,\alpha}_{,\alpha}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}\right), \quad (11.1.6)$$

$$\frac{u^\alpha}{c}=\frac{c^2}{16\pi G}\frac{\left(h^{,\alpha}-h^{\alpha,\beta}_{\beta}\right)^{\cdot}}{a^2(P+\varepsilon)}. \quad (11.1.7)$$

Точка обозначает $\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial\eta}$, $h=h^\alpha_\alpha$. Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате. Здесь и далее в этом разделе u^α — компоненты физической (не координатной!) скорости. В данном приближении этих уравнений достаточно для определения эволюции возмущений, разложенных по плоским волнам в трехмерном пространстве с евклидовой метрикой. При этом (11.1.4) получается из уравнения для $R_{\alpha\alpha}$, (11.1.5) — для $R_{\alpha\beta}$, (11.1.6) — для R_{00} и (11.1.7) — для $R_{0\alpha}$.

§ 2. Классификация возмущений

Решение уравнений (11.1.4) — (11.1.7) для плоских волн возмущения ищем в следующем виде. Сначала по уравнениям (11.1.4), (11.1.5) находим $h_{\alpha\beta}$, а затем уже элементарными вычислениями по (11.1.6) и (11.1.7) находим $\delta\varepsilon$ и u^α.

Возмущения рассматриваются на фоне пространственно-однородной и изотропной, но эволюционирующей Вселенной. Следовательно, решения, относящиеся к «элементарным», «собственным», «фундаментальным» возмущениям (на которые раскладываются произвольные возмущения), должны обладать инвариантностью относительно тех преобразований, относительно которых тождественно инвариантно невозмущенное решение.

Одно преобразование, вытекающее из однородности пространства, есть сдвиг пространственных координат. В нерелятивистской теории было выяснено, что это требование приводит к зависимости решения от координат вида $e^{i\varkappa x}$. Таким образом, решение зависит от одного трехмерного вектора $\boldsymbol{\varkappa}$.

Теперь учтем, что в ОТО «решением» является тензор второго ранга в трехмерном пространстве, $h_{\alpha\beta}$.

Изотропия означает существование группы вращения в трехмерном пространстве. Коэффициенты перед экспонентой и волновой вектор могут быть использованы для построения тензора второго ранга в трехмерном пространстве — тензора возмущений h_{α}^{β}.

Следуя Лифшицу, мы введем сначала скаляр $Q=e^{i\varkappa x}$, который приводит к тензору $h_{\alpha\beta}$ следующим путем. Из Q можно составить тензор двумя способами:

$$Q_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{3}\delta_{\alpha}^{\beta}Q, \quad P_{\alpha}^{\beta}=\left(\frac{1}{3}\delta_{\alpha}^{\beta}-\frac{\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\beta}}{\varkappa^2}\right)Q. \tag{11.2.1}$$

Умножив каждый из тензоров на множитель, зависящий от η, и сложив их, получим тензор

$$h_{\alpha}^{\beta}=\lambda(\eta)P_{\alpha}^{\beta}+\mu(\eta)Q_{\alpha}^{\beta}.$$

Заметим, что из такого тензора можно составить и вектор $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\varkappa}Q/|\boldsymbol{\varkappa}|$ и скаляр Q.

Опять же следуя Лифшицу, введем вектор $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}e^{i\varkappa x}$. Чтобы этот случай не свелся к предыдущему, надо, чтобы из этого вектора нельзя было построить скаляр. Для этого мы потребуем, чтобы $\boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{\varkappa}$, $(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\varkappa})=0$. Следовательно, для данного $\boldsymbol{\varkappa}$ имеются две степени свободы (две независимые компоненты $\boldsymbol{S}$).

С помощью векторов $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ можно построить тензор S_{β}^{α}:

$$S_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{\varkappa}(\varkappa^{\beta}S_{\alpha}+\varkappa_{\alpha}S^{\beta}). \tag{11.2.2}$$

Умножая S_{α}^{β} на множитель, зависящий от времени, получим h_{α}^{β}.

И, наконец, введем тензор второго ранга

$$G_{\alpha}^{\beta}=\gamma_{\alpha}^{\beta}e^{i\varkappa x}. \tag{11.2.3}$$

Так как мы хотим, чтобы с помощью этого тензора и вектора $\boldsymbol{\varkappa}$ нельзя было бы построить ни вектора, ни скаляра (иначе получим один из предыдущих случаев), то мы должны потребовать, чтобы

$$G_{\alpha}^{\beta}\varkappa_{\beta}=0, \qquad G_{\alpha}^{\beta}\varkappa_{\beta}\varkappa^{\alpha}=0. \tag{11.2.4}$$

Напомним, что величины Q, S и G_{α}^{β} являются соответственно скалярами, векторами и тензорами лишь в трехмерном пространстве.

Ниже будет показано, что скаляр Q описывает возмущения скалярной величины — плотности вещества и соответствующие движения вещества, т. е. адиабатические возмущения и, в частности, звуковые волны.

Вектор S описывает возмущение скорости, но ему не соответствует скаляр. Это значит, что $\operatorname{div} u=0$, поле скорости является вихревым ($\operatorname{rot} u\neq0$, иначе при условии конечности u получим $u\equiv0$). Наконец, тензор (11.2.3) описывает ортогональные $\varkappa$ возмущения метрики (без возмущений скорости и плотности), чему соответствуют распространяющиеся по Вселенной гравитационные волны.

Ниже мы подробно останавливаемся на каждом типе возмущений. Лифшиц (1946) рассматривает также возмущения замкнутой ($\Omega>1$) и гиперболической ($\Omega<1$) Вселенной. Однако для возмущений, масштаб которых меньше радиуса мира ($<cH^{-1}\sim4\cdot10^9$ *пс* на сегодняшний момент), отличия малы. Крайний случай возмущения мира как целого обсуждается в разделе IV. Мы продолжим рассмотрение возмущений в плоской модели.

§ 3. Скалярные возмущения

Рассмотрим первый тип возмущений — (11.2.1).

В работе Лифшица было показано, что для ранних стадий расширения, описываемых уравнением состояния $P=\varepsilon/3$, решения уравнений возмущения (11.1.4) — (11.1.7) могут быть записаны в следующем виде: при $\varkappa\eta\ll1$

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha^\beta &= \frac{3C_1}{\eta}P_\alpha^\beta + C_2(Q_\alpha^\beta+P_\alpha^\beta),\\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} &= \frac{\varkappa^2}{9}(C_1\eta+C_2\eta^2)\,Q,\\ \frac{u^\alpha}{c} &= -\frac{i\varkappa}{12}\left(3C_1+C_2\frac{\varkappa^2}{9}\eta^3\right)P^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11.3.1}$$

и при $\varkappa\eta\gg1$

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha^\beta &= \frac{C}{\varkappa^2\eta^2}(P_\alpha^\beta-2Q_\alpha^\beta)\,e^{i\varkappa\eta/\sqrt{3}},\\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} &= -\frac{C}{9}e^{i\varkappa\eta/\sqrt{3}}Q,\\ \frac{u^\alpha}{c} &= \frac{C}{12\sqrt{3}}e^{i\varkappa\eta/\sqrt{3}}P^\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.2}$$

Здесь Q_α^β и P_α^β определяются (11.2.1), $P^\alpha=\dfrac{\varkappa^\alpha}{\varkappa}Q$,

$$C=4\sqrt{3}\,C_2+3i\sqrt{3}\,\varkappa C_1. \tag{11.3.3}$$

В полученных решениях уже исключены моды, соответствующие фиктивным возмущениям, о которых говорилось ранее, и оставлены только физические моды. Технику выделения нефизических мод см. Лифшиц, Халатников (1963а, б). Для других типов возмущений метрики (см. далее §§ 4, 5) мы тоже будем выписывать только физические моды.