Вектор S описывает возмущение скорости, но ему не соответствует скаляр. Это значит, что $\operatorname{div} u=0$, поле скорости является вихревым ($\operatorname{rot} u\neq 0$, иначе при условии конечности u получим $u\equiv 0$). Наконец, тензор (11.2.3) описывает ортогональные $\varkappa$ возмущения метрики (без возмущений скорости и плотности), чему соответствуют распространяющиеся по Вселенной гравитационные волны.

Ниже мы подробно останавливаемся на каждом типе возмущений. Лифшиц (1946) рассматривает также возмущения замкнутой ($\Omega>1$) и гиперболической ($\Omega<1$) Вселенной. Однако для возмущений, масштаб которых меньше радиуса мира ($<cH^{-1}\sim 4\cdot 10^9$ *пс* на сегодняшний момент), отличия малы. Крайний случай возмущения мира как целого обсуждается в разделе IV. Мы продолжим рассмотрение возмущений в плоской модели.

§ 3. Скалярные возмущения

Рассмотрим первый тип возмущений — (11.2.1).

В работе Лифшица было показано, что для ранних стадий расширения, описываемых уравнением состояния $P=\varepsilon/3$, решения уравнений возмущения (11.1.4) — (11.1.7) могут быть записаны в следующем виде: при $\varkappa\eta\ll 1$

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha^\beta &= \frac{3C_1}{\eta} P_\alpha^\beta + C_2 (Q_\alpha^\beta + P_\alpha^\beta), \\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} &= \frac{\varkappa^2}{9}(C_1\eta + C_2\eta^2)\, Q, \\ \frac{u^\alpha}{c} &= -\frac{i\varkappa}{12}\left(3C_1 + C_2\frac{\varkappa^2}{9}\eta^3\right) P^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11.3.1}$$

и при $\varkappa\eta\gg 1$

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha^\beta &= \frac{C}{\varkappa^2\eta^2}(P_\alpha^\beta - 2Q_\alpha^\beta)\, e^{i\varkappa\eta/\sqrt{3}}, \\ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} &= -\frac{C}{9} e^{i\varkappa\eta/\sqrt{3}} Q, \\ \frac{u^\alpha}{c} &= \frac{C}{12\sqrt{3}} e^{i\varkappa\eta/\sqrt{3}} P^\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.2}$$

Здесь Q_α^β и P_α^β определяются (11.2.1), $P^\alpha = \frac{\varkappa^\alpha}{\varkappa} Q$,

$$C = 4\sqrt{3}\, C_2 + 3i\sqrt{3}\,\varkappa C_1. \tag{11.3.3}$$

В полученных решениях уже исключены моды, соответствующие фиктивным возмущениям, о которых говорилось ранее, и оставлены только физические моды. Технику выделения нефизических мод см. Лифшиц, Халатников (1963а, б). Для других типов возмущений метрики (см. далее §§ 4, 5) мы тоже будем выписывать только физические моды.

Эти формальные результаты необходимо сравнить с интуитивными (т. е. не вполне строгими) результатами, полученными в предыдущей главе. Условие конечных возмущений метрики вблизи сингулярности есть $C_1=0$. С учетом этого при $\varkappa\eta \ll 1$ главным членом в $\delta \equiv \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}$ будет $\frac{\varkappa^2}{9} C_2 \eta^2 Q$. Вспоминая, что $\eta \sim t^{1/2}$, получим $\delta \sim t$. При $\varkappa\eta \gg 1$ $\delta \sim \cos \frac{\varkappa\eta}{\sqrt{3}}$, что соответствует акустическим колебаниям со скоростью звука $b=\frac{c}{\sqrt{3}}$ и постоянной амплитудой возмущений плотности. Таким образом, наиболее важные результаты интуитивного анализа подтверждаются в точной теории. Это же справедливо и для уравнения состояния $P=0$, рассматривавшегося Боннором (1957) в нерелятивистской теории. Любопытно, что эволюция теоретической мысли шла в неестественном порядке, точная теория была развита на 10—20 лет раньше, чем интуитивный подход.

Точная теория работает с возмущениями метрики. Согласно (11.3.1) мода C_1 связана с бесконечным $(\sim 1/\sqrt{t})$ возмущением метрики при $t \to 0$. Поэтому, если требовать, чтобы в момент η_0 возмущения были малы, то $C_1 \ll \eta_0$. Для C_2 имеем условие $C_2 \ll 1$. Следовательно, в теории малых возмущений, в которой предполагается, что возмущения в начале расширения при $t \to 0$ малы, необходимо положить $C_1=0$, как уже упоминалось выше, и рассматривать только моду с C_2, т. е. моду с $\delta \sim t$. Эта мода, требующая конечных возмущений метрики при $t \to 0$ (h_α^β при этом вообще не зависят от t), связана с возмущениями плотности, конечными при конечном времени, но стремящимися к нулю пропорционально t при $t \to 0$.

Когда этот результат известен, его нетрудно получить и из интуитивных соображений; мерой возмущений метрики является безразмерное отношение $\frac{\delta\varphi}{c^2}$, где φ — ньютоновский гравитационный потенциал. По порядку величины $\delta\varphi \sim \frac{G\delta M}{l} \sim G\delta\rho l^2 \sim G \cdot \rho \cdot \delta \cdot l^2$. При $P=\varepsilon/3$, подставляя $\rho \sim t^{-2}$, $l \sim a \sim t^{1/2}$, $\delta \sim t$, получим, что $\frac{\delta\varphi}{c^2} = \mathrm{const}$, т. е. не зависит от t. Легко проверить, что $\delta\varphi = \mathrm{const}$ для больших длин волн (что соответствует постоянству возмущений метрики) при любом уравнении состояния. Например, для $P=0$

$$\rho \sim t^{-2}, \qquad \delta \sim t^{2/3}, \qquad l \sim a \sim t^{2/3}, \qquad \rho l^2 \delta \sim \mathrm{const}.$$

Еще раз подчеркнем, что эти соображения не имеют силы доказательств, так как ньютоновская теория используется за границей области своей применимости (в области, где $\varphi > c^2$)*).

*) Кроме того, отождествление $\delta\varphi/c^2$ с возмущением потенциала в деформирующейся системе отсчета тоже не всегда верно.

Независимость возмущений метрики от времени на ранних стадиях расширения полностью согласуется с идеей, которая подчеркивалась при интуитивном анализе длинноволновых возмущений. В § 4 главы 9 рассматривалась независимая эволюция двух областей с различными начальными условиями. В рамках ОТО обе эти области (части) отличаются также метрикой и кривизной. В ходе независимой эволюции это различие в метриках сохраняется. Например, отношение длины экватора к радиусу (оно меньше, чем 2π) в области замкнутого мира всегда одно и то же в ходе эволюции этой области мира.

Сферически-симметричные возмущения с $\delta > 0$, являющиеся суперпозицией плоских волн, могут рассматриваться как часть замкнутого мира, вложенная в плоский мир. Эта интерпретация важна при сравнении точной теории в рамках ОТО и интуитивного анализа. Возмущения скорости, даваемые (11.3.1), пропорциональны $\varkappa^3\eta^3 \sim t^{3/2} \sim \lambda^3$, тогда как интуитивный анализ дает $u \sim \frac{\lambda\delta}{t} \sim t^{1/2}$. Налицо, казалось бы, явное противоречие, но это не так. Дело в том, что это скорости по отношению к разным системам отсчета. В интуитивной ньютоновской теории скорость определяется по отношению к невозмущенной системе отсчета. В точной теории (ОТО) в возмущенном решении нет «невозмущенной» системы отсчета, и скорость измеряется в уже возмущенной метрике. Возмущения метрики включают изменение локальной постоянной Хаббла, и, следовательно, главная часть «возмущенной» скорости интуитивной теории уже содержится в возмущениях метрики. Если в обоих подходах вычислять не скорость, которая зависит от выбора системы отсчета, а возмущения тензора скоростей деформации вещества, то получатся одинаковые результаты.

Различие двух подходов в вычислении u исчезает на поздних стадиях, когда длина волны возмущения становится мала по сравнению с горизонтом, $\lambda \ll ct$. Здесь возмущения метрики стремятся к нулю, есть полное соответствие между δ и u. Это — описание звуковых волн. Очевидно, описание коротких звуковых волн в рамках ОТО — роскошь, но сила и красота метода Лифшица таковы, что он может себе это позволить! Однако нужно подчеркнуть, что уменьшение возмущений метрики при $\lambda \ll ct$ специфично именно для уравнения состояния плазмы с доминирующей ролью излучения, со скоростью звука $b = c\sqrt{3}$. Здесь играет роль именно выравнивание возмущений под влиянием градиента давления, играет роль «звуковой» горизонт. При $P=0$ звукового режима нет, $b=0$, возмущения плотности продолжают расти при $\lambda < ct$, остаются постоянными возмущения метрики; короче — в пыли свет ничего не выравнивает.

В своей пионерской работе Лифшиц подчеркивал отличие степенного возрастания δ в теории, основанной на ОТО, от экспоненциального роста возмущений в теории Джинса, основанной на ньютоновской механике. Мы знаем теперь, что дело не в переходе от ньютоновской теории к ОТО, а в рассмотрении эволюционирующей Вселенной. И в действительности $t^n \approx e^{\int \omega dt}$, отличия нет. Однако второй важнейший качественный вывод Лифшица остается непоколебимым до сегодняшнего дня: для объяснения наблюдаемой картины с конечными возмущениями плотности сегодня (галактики!) достаточно, чтобы $\delta \to 0$ при $t \to 0$, но возмущения *метрики* должны быть конечными, $h_\alpha^\beta \neq 0$ при $t \to 0$. По оценке Новикова (1964б), рассмотревшего конкретную ситуацию в нашей Вселенной, $h_\alpha^\beta \approx \approx 10^{-2}$—$10^{-3}$ при $t \to 0$. Эта оценка, сделанная до открытия реликтового излучения, мало изменилась с учетом горячей Вселенной.

Вселенная, асимптотически приближающаяся к строго однородной по всем параметрам (плотность, энтропия, метрика) вблизи сингулярности, несовместима с наблюдаемой в настоящее время картиной! Этот вывод остается справедливым и для других видов возмущений метрики, которые мы рассмотрим ниже. Энтропийные возмущения не связаны с возмущением метрики, они совместимы с $h_\alpha^\beta = 0$ при $t = 0$, но при этом конечным остается $\dfrac{\delta\rho_{\text{вещ}}}{\rho_{\text{вещ}}}$ при $t \to 0$.

Приведем в заключение формулы решения для возмущений первого типа, справедливые на поздних стадиях расширения, когда $P = 0$. Если пылевидное вещество движется без вращений, то синхронная система всегда может быть выбрана сопутствующей веществу. Рассматриваемый тип возмущений как раз относится к этому классу. Поэтому возмущенное решение будем рассматривать в сопутствующей системе отсчета, $u^\alpha \equiv 0$.

Формулы для возмущений имеют вид:

при $\eta \ll \dfrac{1}{\varkappa}$

$$h_\alpha^\beta = C_1 (P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta) + \frac{2\varkappa^2 C_2}{\eta^3} (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta); \tag{11.3.4}$$

при $\dfrac{1}{\varkappa} \ll \eta \ll 1$

$$h_\alpha^\beta = \left(\frac{C_1}{15}\eta^3 + \frac{2C_2}{\eta^3}\right)\varkappa^2 (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta). \tag{11.3.5}$$

В обоих случаях

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \left(\frac{C_1\eta^2}{30} + \frac{C_2}{\eta^3}\right)\varkappa^2 Q. \tag{11.3.6}$$

Наконец, если плотность вещества не равна критической, то на поздних стадиях расширения, при $\eta \gg 1$, имеется милновская стадия, масштабный фактор $a\sim t\sim e^{\eta}$ и для возмущений получаем

$$h_\alpha^\beta=\left[2C_1\varkappa^2\left(\frac{1}{3}-2\eta e^{-\eta}\right)+C_2e^{-\eta}\right](P_\alpha^\beta-Q_\alpha^\beta), \tag{11.3.7}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=\left(\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{4}e^{-\eta}\right)Q. \tag{11.3.8}$$

Последняя формула наглядно показывает, что на милновской стадии возмущения плотности «застывают» при $t\to\infty$.

§ 4. Векторные (вращательные) возмущения

Рассмотрим второй тип возмущений метрики — (11.2.2).

Развитие вращательных возмущений определяется формулами

$$h_\alpha^\beta=\sigma(\eta)\,(S_\alpha\varkappa^\beta+\varkappa_\alpha S^\beta)e^{i\varkappa x},\qquad S_\alpha\varkappa^\alpha=0, \tag{11.4.1}$$

$$\frac{u^\alpha}{c}=-\frac{i\varkappa\dot\sigma}{2a^2(\varepsilon+P)}S^\alpha e^{i\varkappa x},\qquad \sigma=\sigma_0\int\frac{d\eta}{a^2},$$

так что для $P=\varepsilon/3$, $a\sim\eta$, $\varepsilon\sim\eta^{-4}$ имеем

$$\sigma=-\frac{C_3}{\eta},\qquad \delta=0,$$
$$\frac{u^\alpha}{c}=-\frac{i\varkappa C_3}{8}S^\alpha e^{i\varkappa x}. \tag{11.4.2}$$

Главный результат интуитивного анализа — независимость возмущений скорости от времени — подтверждается. Эта независимость справедлива как при $\varkappa\eta<1$, так и при $\varkappa\eta>1$, т. е. при $\lambda>ct$ и $\lambda<ct$. Но неожиданным является рост возмущений метрики ($\sigma\to\infty$) при $\eta\to 0$. Это приводит к выводу, что начальные возмущения вращательного типа несовместимы с космологическим решением типа Вселенной Фридмана *) [Озерной, Чернин (1967, 1968), Зельдович, Новиков (1970)]. Результат является тем более неожиданным, что кажется естественным взять отношение u/c в качестве меры отклонения возмущений от решения Фридмана, а это отношение остается постоянным при $t\to 0$. Тот факт, что две безразмерные величины u/c и σ имеют разную асимптотику при $t\to 0$, нуждается в объяснении. Необходимо напомнить, что скорость u^α, определяемая согласно Лифшицу [см. (11.4.1), (11.4.2)], в некотором смысле не является полной скоростью. Как мы уже неоднократно подчеркивали, понятие скорости связано с выбором системы отсчета и поэтому относительно. Важными абсолютными характеристиками возмущений являются абсолютное вращение элементов вещества **)

*) Точный вывод: возмущения вращательного типа приводят к такой асимптотике решения вблизи сингулярности, которая отличается от решения Фридмана.

**) Вращение является абсолютным относительно локально инерциальной системы, в которой нет кориолисовых и центробежных сил. Такая система определяется локально с помощью гироскопов безотносительно к далеким звездам (мы не боимся антимаховской терминологии).