стадия, масштабный фактор $a \sim t \sim e^{\eta}$ и для возмущений получаем

$$h_{\alpha}^{\beta}=\left[2C_1\varkappa^2\left(\frac{1}{3}-2\eta e^{-\eta}\right)+C_2e^{-\eta}\right](P_{\alpha}^{\beta}-Q_{\alpha}^{\beta}), \tag{11.3.7}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=\left(\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{4}e^{-\eta}\right)Q. \tag{11.3.8}$$

Последняя формула наглядно показывает, что на милновской стадии возмущения плотности «застывают» при $t \to \infty$.

§ 4. Векторные (вращательные) возмущения

Рассмотрим второй тип возмущений метрики — (11.2.2). Развитие вращательных возмущений определяется формулами

$$h_{\alpha}^{\beta}=\sigma(\eta)\,(S_{\alpha}\varkappa^{\beta}+\varkappa_{\alpha}S^{\beta})e^{i\varkappa x}, \qquad S_{\alpha}\varkappa^{\alpha}=0, \tag{11.4.1}$$

$$\frac{u^{\alpha}}{c}=-\frac{i\varkappa\dot{\sigma}}{2a^2(\varepsilon+P)}S^{\alpha}e^{i\varkappa x}, \qquad \sigma=\sigma_0\int\frac{d\eta}{a^2},$$

так что для $P=\varepsilon/3$, $a\sim\eta$, $\varepsilon\sim\eta^{-4}$ имеем

$$\sigma=-\frac{C_3}{\eta}, \qquad \delta=0,$$
$$\frac{u^{\alpha}}{c}=-\frac{i\varkappa C_3}{8}S^{\alpha}e^{i\varkappa x}. \tag{11.4.2}$$

Главный результат интуитивного анализа — независимость возмущений скорости от времени — подтверждается. Эта независимость справедлива как при $\varkappa\eta<1$, так и при $\varkappa\eta>1$, т. е. при $\lambda>ct$ и $\lambda<ct$. Но неожиданным является рост возмущений метрики ($\sigma\to\infty$) при $\eta\to 0$. Это приводит к выводу, что начальные возмущения вращательного типа несовместимы с космологическим решением типа Вселенной Фридмана *) [Озерной, Чернин (1967, 1968), Зельдович, Новиков (1970)]. Результат является тем более неожиданным, что кажется естественным взять отношение u/c в качестве меры отклонения возмущений от решения Фридмана, а это отношение остается постоянным при $t\to 0$. Тот факт, что две безразмерные величины u/c и σ имеют разную асимптотику при $t\to 0$, нуждается в объяснении. Необходимо напомнить, что скорость u^{α}, определяемая согласно Лифшицу [см. (11.4.1), (11.4.2)], в некотором смысле не является полной скоростью. Как мы уже неоднократно подчеркивали, понятие скорости связано с выбором системы отсчета и поэтому относительно. Важными абсолютными характеристиками возмущений являются абсолютное вращение элементов вещества **)

*) Точный вывод: возмущения вращательного типа приводят к такой асимптотике решения вблизи сингулярности, которая отличается от решения Фридмана.

**) Вращение является абсолютным относительно локально инерциальной системы, в которой нет кориолисовых и центробежных сил. Такая система определяется локально с помощью гироскопов безотносительно к далеким звездам (мы не боимся антимаховской терминологии).

и изменение характера его деформации. Вращательные возмущения исчерпываются этими двумя характеристиками. В то время как скорость u^α полностью описывает в данном случае вращение элементов среды, она не исчерпывает ее деформации. Это связано с тем, что система отсчета сама не вращается (она синхронна, $g_{0\alpha} \equiv 0$,— это означает отсутствие вращения, см. ТТ и ЭЗ) и все вращение среды связано с ее движением в системе. Но сама синхронная система деформируется, и это необходимо учитывать. При вычислении деформации среды надо учесть деформацию возмущенной системы отсчета, в которой проводится все рассмотрение. Деформация среды складывается из деформации, вызванной движением относительно системы отсчета, и деформации самой системы отсчета.

Скорость, определяемая (11.4.2), соответствует сдвиговому движению (например, движению вдоль оси y, причем скорость зависит от x), которое совмещает и вращение и деформацию элемента среды.

Напомним, как описывается относительное движение соседствующих элементов среды *). Вводим систему координат, движущуюся вместе с избранной частицей, находящейся в данный момент в начале координат, и требуем, чтобы система координат была локально евклидовой и локально инерционной. Из условия $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}=0, t=0)=0$ следует, что скорости соседних частиц в близкие моменты времени в первом порядке по малым $\boldsymbol{x}$, t можно записать как

$$u_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = F_\alpha t + D^*_{\alpha\beta} x^\beta.$$

Здесь F_α — трехмерный вектор ускорения жидкости, зависящего от негравитационных сил (в рамках гидродинамики такой силой является градиент давления).

Тензор второго ранга в трехмерном пространстве $D^*_{\alpha\beta}$ разбивается на две части: антисимметричную $A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D^*_{\alpha\beta} - D^*_{\beta\alpha})$ и симметричную $D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D^*_{\alpha\beta} + D^*_{\beta\alpha})$. Антисимметричная часть описывает вращение жидкости: угловая скорость дается аксиальным вектором $\Omega_\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$, где $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — единичный, полностью антисимметричный тензор. Она может быть измерена в сопутствующей системе по появлению кориолисовых ускорений. Деформация элемента среды полностью определяется симметричным тензором $D_{\alpha\beta}$.

Отметим принципиальную разницу между $A_{\alpha\beta}$ и F_α, с одной стороны, и $D_{\alpha\beta}$ — с другой. Измерение $A_{\alpha\beta}$ и F_α требует введения приборов, например свободных пробных тел и гироскопов. Для

*) Систематическое построение механики в рамках ОТО, основанное на понятии деформации, производилось Зельмановым (1959б). Изложение этого вопроса см. в ТТ и ЭЗ.

определения $D_{\alpha\beta}$ достаточно измерить расстояния между системой избранных частиц среды *).

След тензора, т. е. $D=D_{11}+D_{22}+D_{33}$ (он не зависит от выбора осей), определяет изменение удельного объема среды при деформации, $\dot{V}/V=-\dot{n}/n=D$ (n — плотность сохраняющихся частиц). Остающийся тензор с нулевым следом $\Pi_{\alpha\beta}=D_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}D$ характеризует анизотропию деформации среды: под действием $\Pi_{\alpha\beta}$ шар превращается в равновеликий трехосный эллипсоид. Тензор $\Pi_{\alpha\beta}$ имеет пять независимых компонент: два отношения осей эллипсоида, характеризующие его форму, и три угла, характеризующие ориентацию в пространстве **). Приведенные выше формулы требуют, чтобы в рассматриваемой точке в данный момент метрика была галилеевой ($g_{00}=1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$, остальные $g_{ik}=0$). Формулы, позволяющие вычислить тензор скоростей деформации $D_{\alpha\beta}$ и также F_α и $A_{\alpha\beta}$, не переходя к галилеевой системе, а сразу по величинам $g_{ik}=g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, приведены в ТТ и ЭЗ. Здесь нам потребуется только частный случай одной из этих формул. Прежде чем ее выписать, вернемся к рассматриваемой нами задаче.

Мы хотим вычислить деформацию элемента среды в возмущенной задаче. Мы убедимся после вычислений, что вращательные возмущения приводят к тому, что элемент деформируется существенно анизотропно в отличие от строго изотропной деформации в невозмущенной Вселенной Фридмана. Именно эта анизотропия деформации быстро нарастает в прошлое $t\to 0$. Она описывается ростом h_α^β при приближении к сингулярности и растет, несмотря на то что вращательные скорости остаются малыми. В конце параграфа мы приведем физическое пояснение этой ситуации.

Итак, займемся вычислениями деформации элемента среды. Как уже подчеркивалось, полная деформация равна сумме деформации системы отсчета, в которой рассматривается вся задача, и деформации, вызванной скоростью движения среды в системе отсчета. Начнем с деформации системы отсчета. Общая формула для вычисления $D_{\alpha\beta}$ [см. ТТ и ЭЗ, формула (1.6.4)] для синхронной системы записывается в виде

$$D_{\alpha\beta}=-\frac{c}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}. \qquad (11.4.3)$$

Вторая часть деформации, связанная со скоростями, может быть вычислена стандартным в гидродинамике способом как произ-

*) Это не значит, что F_α и $A_{\alpha\beta}$ менее реальны! В частности, зная уравнения механики, уравнение состояния среды и измеряя распределение давления и плотности, а также $D_{\alpha\beta}$ и $D_{\alpha\beta}^{(0)}$, можно определить F_α и $A_{\alpha\beta}$ и без помощи пробных тел.

**) С другой стороны, эллипсоид можно рассматривать как результат возмущения газа квадрупольными функциями, отвечающими моменту $l=2$. Число таких независимых функций равно $2l+1=5$.

водная скорости по координатам. Однако, как мы видели выше, относительная скорость мала и остается постоянной. Относительная величина отклонений деформации среды от изотропной, связанная с этой скоростью, не нарастает в прошлое, поэтому и без вычислений ясно, что этим слагаемым в деформации среды можно пренебречь по сравнению с (11.4.3) при $t \to 0$.

Итак, при $t \to 0$ полная анизотропия деформации среды описывается (11.4.3). Из этой формулы видно, что отклонение возмущенного решения вихревого типа от фридмановского при $t \to 0$ связано не прямо с вращательными скоростями вещества, а с вызванной этими скоростями анизотропией деформации. Этот эффект является чисто релятивистским.

Проведем вычисление анизотропии деформации среды. Перепишем уравнение (11.4.3), используя (11.4.2):

$$D_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{(0)}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= D^{(0)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sigma(t)\, a^2(t)\right] S_{\alpha\beta}. \qquad (11.4.3а)$$

Здесь $D^0_{\alpha\beta}$ — тензор скоростей деформации системы невозмущенного решения, вместо $h_{\alpha\beta}$ подставлено его значение (11.4.2) для вихревых возмущений [множитель $a^2(t)$ появился при опускании индекса у h^{α}_{β}], $S_{\alpha\beta}$ не зависит от t. Вычислим теперь анизотропную часть этого тензора, $\Pi^{\beta}_{\alpha} = D^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{3} D g^{\beta}_{\alpha}$. Отличные от нуля члены Π^{β}_{α} имеют следующий порядок величины (учитываем, что $a(t) \sim t^{1/2}$ для $P = \varepsilon/3$):

$$|\Pi^{\beta}_{\alpha}| \approx \left(-\frac{\sigma}{t} + \frac{1}{t}\frac{d(\sigma t)}{dt}\right) = \frac{d\sigma}{dt}. \qquad (11.4.4)$$

Величины Π^{β}_{α} есть отклонения хаббловских констант по разным направлениям от средней хаббловской константы $H = \frac{1}{3} D = \frac{1}{2t}$. Относительная величина этих отклонений

$$\frac{|\Pi^{\beta}_{\alpha}|}{H} \approx \frac{d\sigma}{dt}\, t = \frac{C_3}{t^{1/2}}. \qquad (11.4.5)$$

На первый взгляд кажется, что этого нарастания анизотропии деформации можно избежать, если в качестве возмущения взять твердотельное вращение в заданном лагранжевом масштабе. При этом в ньютоновском приближении деформация отсутствует вовсе. Казалось бы, скорость вращения u, остающаяся все время постоянной и малой, не может привести к сильным релятивистским эффектам. Однако это не так, потому что возмущение любого масштаба при $t \to 0$ оказывается глубоко внутри гравитационного радиуса массы, который оно охватывает. Вся задача становится существенно релятивистской, и даже малая скорость u приводит к сильным эффектам. Помимо малого параметра u/c в задачу входит еще большой параметр l/ct (l — длина возмущения), и релятивистские эффекты определяются произведением этих двух параметров. Формула (11.4.5) может быть переписана так:

$$\frac{|\Pi_\alpha^\beta|}{H} \approx \left(\frac{u}{c}\right)\left(\frac{l}{ct}\right). \qquad (11.4.6)$$

В рассматриваемой задаче с твердотельным законом вращения возмущения тождественно отсутствуют лишь на оси вращения, где скорость u равна нулю.

Произвольные возмущения вихревого типа остаются малыми при движении к сингулярности, $t \to 0$, до тех пор, пока $\frac{|\Pi_\alpha^\beta|}{H} < 1$. Ясно, что для каждой длины волны возмущения наступает в прошлом момент, когда $|\Pi_\alpha^\beta|$ сравнивается с H. Длины в нашем случае пропорциональны $t^{1/2}$, $l \sim t^{1/2}$. Поэтому, согласно (11.4.6), для критического момента, когда $\frac{|\Pi_\alpha^\beta|}{H} = 1$, должно быть $1 = \left(\frac{u}{c}\right)\frac{l_0}{ct_c^{1/2}\, t_0^{1/2}}$, т. е.

$$t_c = \frac{l_0^2}{c^2}\frac{u^2}{c^2 t_0}. \qquad (11.4.7)$$

В период $t < t_c$ расширение сильно отличалось от хаббловского. При обсуждении вихревой теории происхождения галактик (см. гл. 13) эти выводы необходимо учитывать. По существу, сильное отличие от невозмущенной модели заключено уже в том, что безразмерные возмущения метрики стремятся к бесконечности, как $\eta^{-1} = t^{-1/2}$, вблизи сингулярности при $t \to 0$. Анализ деформаций, проведенный выше, помогает наглядно понять характер отклонений от невозмущенной модели с точки зрения локального наблюдателя. Тем самым с несомненностью доказывается объективный характер нарастания отклонений от модели Фридмана, которые не устраняются каким-либо преобразованием координат.

В заключение параграфа приведем формулы для вихревых возмущений на поздней стадии при уравнении состояния $P = 0$. В отличие от потенциальных движений, рассмотренных в предыдущем параграфе, здесь при наличии вращения вещества синхронная система не может быть сопутствующей даже при $P = 0$.

Формулы для возмущения имеют следующий вид:

при $\eta \ll 1$

$$\sigma = -\frac{8C_3}{3\eta^3}, \qquad \frac{u^\alpha}{c} = -\frac{i\varkappa C_3}{6\eta^2} S^\alpha e^{i\varkappa x}; \qquad (11.4.8)$$

при $\eta \gg 1$

$$\sigma = -4C_3 e^{-\eta}, \qquad \frac{u^\alpha}{c} = -\frac{i\varkappa C_1}{6e^\eta} S^\alpha e^{i\varkappa x}. \qquad (11.4.9)$$

В обоих случаях скорости u^α затухают $\sim 1/a$.