§ 5. Тензорные возмущения — гравитационные волны

Решение, соответствующее тензорным возмущениям, определяется формулами

$$h_\alpha^\beta = \nu(\eta)\, G_\alpha^\beta e^{i\varkappa x}, \qquad G_\alpha^\beta \varkappa^\alpha = 0, \qquad \frac{\delta\rho}{\rho} \equiv 0, \qquad u^\alpha \equiv 0, \qquad (11.5.1)$$

где G_α^β — постоянный (не зависящий ни от координат, ни от времени) тензор *) (см. § 2 этой главы). Подчеркнем, что возмущенная система отсчета в этом случае является сопутствующей веществу. Уравнения ОТО (11.1.4), (11.1.5) для релятивистского газа $P=\varepsilon/3$ в случае возмущений вида (11.5.1) дают решение

$$\nu = Ca^{-1}e^{i\varkappa\eta} = \frac{C_4 \cos \varkappa\eta + C_5 \sin \varkappa\eta}{\eta}; \qquad (11.5.2)$$

здесь C — комплексная постоянная, C_4, C_5 — действительные постоянные.

Если длина волны меньше оптического горизонта ct, решение описывает волновое гравитационное поле. После этого ясно, что в ходе расширения для любой длины гравитационной волны (в лагранжевой сопутствующей системе) наступает момент t, когда эта длина становится меньше оптического горизонта. Тогда можно по обычным формулам [см., например, Ландау и Лифшиц (1973)] вычислить плотность энергии гравитационных волн. Амплитуда гравитационной волны h есть

$$h \approx \frac{C_{4,5}}{\eta} = \mathrm{const}\cdot(1+z) = \mathrm{const}\cdot a^{-1},$$

где $C_{4,5}$ — наибольшая по модулю величина из C_4 и C_5. Плотность энергии гравитационных волн

$$\varepsilon_g = \frac{\pi c^4}{8G}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \sim a^4 \sim (1+z)^4. \qquad (11.5.3)$$

Плотность энергии оказывается $\sim a^4$, так как согласно предыдущей формуле $h \sim a^{-1}$; кроме того, $\lambda \sim a$. Это очевидный результат, описывающий изменение с космологическим расширением плотности энергии ε_g, запасенной в виде гравитационных волн. Соотношение между зависимостью от времени и зависимостью от координат соответствует волновому решению, скорость волны равна c. Как отмечалось Лифшицем, с гравитационными волнами не связаны возмущения скорости и плотности. Утверждение о скорости является пиквикским **).

*) При данном волновом векторе $\varkappa$ есть два линейно независимых тензора G, соответствующих двум поляризациям гравитационной волны.

**) «Мистер Блаунтли отмечает, что он назвал достопочтенного председателя невеждой в чисто пиквикском смысле» (Ч. Диккенс, Посмертные записки Пиквикского клуба).

Действительно, скорость вещества относительно возмущенной системы координат тождественно равна нулю в поле гравитационной волны, ибо возмущенная синхронная система является сопутствующей веществу. Однако относительные скорости частиц меняются при наличии гравитационной волны, т. е. имеются деформации (возмущения) самой системы отсчета. Если проделать по формуле (11.4.3) вычисления деформации системы отсчета для метрики $g^{(0)}_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$, где $h_{\alpha\beta}$ удовлетворяют (11.5.1), (11.5.2), то легко убедиться, что деформация среды носит следующий характер: шар превращается в эллипсоид с отношениями осей $(1+h):(1-h)$, причем неизменна третья ось, расположенная вдоль направления распространения волны, а величина h периодически изменяется со временем. Объем шара не изменяется, плотность остается постоянной, невозмущенной, в соответствии с тем, что след тензора возмущенной части $D_{\alpha\beta}$ в случае гравитационной волны равен нулю.

Рассмотрим вопрос о взаимодействии гравитационных волн со средой. Идеальная жидкость (без вязкости и упругости) характеризуется тем, что ее тензор натяжений $T_{\alpha\beta}$ сводится к одному скаляру — давлению (закон Паскаля); при анизотропной деформации с постоянной плотностью и, следовательно, постоянным давлением жидкость без сопротивления принимает новую форму. Но это значит, что в жидкости не выделяется тепло, не растет энтропия и не рождаются новые гравитационные волны. Между тем именно рождение новой волны и ее интерференция с проходящей («старой») волной являются механизмом, осуществляющим поглощение волны и изменение ее фазы. Именно за счет объемного излучения вещества, через которое проходит волна, возникает отличный от единицы показатель преломления среды для волн.

Итак, идеальная жидкость не меняет закона распространения гравитационных волн. Именно такой результат получил Лифшиц, решая задачу о гравитационных волнах в расширяющейся Вселенной, заполненной идеальной жидкостью. Если жидкость вязкая, то при деформации происходит нагревание жидкости. Очевидно, что энергия черпается из энергии гравитационной волны; отсюда Хоукинг (1966а) нашел выражение для коэффициента затухания гравитационной волны в вязкой среде:

$$\frac{dE}{dt}=-\xi E,\qquad \frac{dE}{dx}=-\frac{\xi}{c}E,\qquad \xi=\frac{16\pi G\eta^*}{c^2},\tag{11.5.4}$$

где η^* — вязкость. Записав вязкость в виде $\eta^*=\rho\nu^*$, где $\nu^*=\frac{1}{3}cl$ — кинематическая вязкость для релятивистских частиц с пробегом l *),

*) Заметим, что гравитационные волны, как и вихревые возмущения, не сопровождаются изменением объема и температуры, поэтому затухание обоих этих типов возмущений не зависит от так называемой второй вязкости, от релаксации процессов установления равновесия и от теплопроводности.

получим

$$\xi = \frac{16\pi}{3c} G\rho l.$$

Однако очевидно, что такое выражение справедливо лишь до тех пор, пока можно пользоваться понятием вязкости, т. е. пока пробег l меньше длины волны λ. При $l \gg \lambda$ нужно рассматривать противоположный случай (почти) свободных частиц в гравитационной волне, к чему мы перейдем ниже, в гл. 16.

Поверим, пока без доказательства, что затухание максимально и может быть вычислено по формуле, приведенной выше, при $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{cT}{2}$, где T — период волны. Применительно к космологической задаче выразим плотность через время: $\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}$ для $P = \frac{\varepsilon}{3}$. Получим компактное выражение для верхнего предела ξ:

$$\xi < \xi_{max} = \frac{16\pi G \rho c \lambda}{6c^2} = \frac{T}{4t^2}. \tag{11.5.5}$$

С течением времени период волны T растет пропорционально длине волны:

$$T \sim \lambda \sim a(t) \sim \sqrt{t}. \tag{11.5.6}$$

Введем обозначение t_0 для момента, когда $T = t = t_0$, так что (11.5.6) перепишется в виде $T = \sqrt{tt_0}$. Лишь после момента t_0 можно рассматривать затухание гравитационной волны по приведенным формулам. Оказывается, что интеграл затухания сходится:

$$\int_{t_0}^{\infty} \xi_{max} dt = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{tt_0}}{t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Вязкость среды не более чем в $\sqrt{e}$ раз уменьшает энергию гравитационных волн по сравнению с расчетом для идеальной жидкости, учитывающим только адиабатическое изменение энергии волн.

Рассмотрим теперь свойства решения (11.5.2) при $t \to 0$. В период, когда длина волны меньше ct, это решение описывает еще не волны в привычном смысле. Дело в том, что с начала расширения Вселенной прошло времени слишком мало даже для одного колебания волны.

Важно, что одно из независимых решений $\left(\frac{C_4}{\eta} \sin \varkappa\eta\right)$ конечно при $\eta \to 0$, $t \to 0$. Следовательно, если положить $C_4 = 0$, то такие ограниченные начальные возмущения метрики совместимы с конечной плотностью энергии ε_g на более поздних стадиях расширения. По порядку величины отношение $\varepsilon_g/\varepsilon_\gamma$ равно квадрату безразмерного возмущения метрики (ε_γ — плотность энергии электромагнитного излучения). Это соотношение справедливо для гравитационных волн, длина которых мала по сравнению с горизонтом, но при этом условии оно не зависит от длины волны. Такое соотношение поддерживается и до и после момента рекомбинации водорода, поскольку ε_γ изменяется пропорционально a^{-4}, т. е. так же, как и ε_g. К роли гравитационных волн в космологии мы вернемся в гл. 16.

§ 6. Энтропийные возмущения в релятивистской теории

Интерес к энтропийным возмущениям связан с тем, что они позволяют получить современную структуру Вселенной из сингулярного состояния, метрика которого (асимптотически) точно описывается решением Фридмана, без каких-либо отклонений от однородности. Это обстоятельство отмечает Чибисов (1972б). Неоднородно в пространстве распределен барионный заряд (разность $r=\frac{n_B-n_{\bar B}}{n_\gamma}$ плотности барионов и антибарионов, отнесенная к плотности фотонов), но вблизи сингулярности заряд не влияет на метрику.

В пределе, при высокой температуре, соотношение между плотностью энергии и давлением не зависит от удельного барионного заряда. В частности, при ограниченном спектре масс элементарных частиц для давления имеем формулу $P=\varepsilon/3$ при $kT\gg mc^2$ (m — наибольшая масса частиц) независимо от того, является ли вещество зарядово-симметричным, $r=0$, или «заряженным», $r>0$.

Отсюда и следует возможность построить решение с невозмущенной метрикой и давлением и плотностью энергии, не зависящими от координат. Лишь в дальнейшем ходе расширения, при $kT<mc^2$, из-за неоднородности r возникают различные уравнения состояния в различных местах согласно приближенной формуле

$$P=\frac{\varepsilon}{3}\left(1-r(x)\,\varepsilon^{-1/4}\right). \qquad (11.6.1)$$

Возникают возмущения метрики, а также движение вещества, вызванные различием уравнений состояния в разных точках пространства. Начальные энтропийные возмущения порождают адиабатические возмущения плотности и, в частности, порождают растущую моду адиабатических возмущений, если длина волны достаточно велика. Этот факт не является специально следствием релятивистской теории. Важно лишь, что рассматриваются возмущения в эволюционирующей Вселенной, в которой с течением времени меняется уравнение состояния вещества (в отличие от джинсовской постановки задачи). Энтропийное возмущение с длиной волны, соответствующей массе меньше $10^4 M_\odot$, вызывает только затухающие общие колебания плазмы. Но наряду с этим неравномерность