энтропии сохраняется и проявляется (для $M > 10^5 M_\odot$) после рекомбинации водорода.

В принципе можно также рассматривать неравномерное распределение лептонного заряда, т. е. избытка нейтрино над антинейтрино. В этом случае также можно задаться невозмущенной метрикой в сингулярности. Вследствие большого пробега нейтрино неравномерность выравняется рано, и амплитуда растущего возмущения плотности окажется относительно малой.

Такая гипотеза лишена изящества и никем подробно не разрабатывалась. Известным сходством с энтропийным возмущением обладает и начальное возмущение в виде хаотического магнитного поля: магнитное поле вморожено в плазму, как и энтропийные возмущения. Однако магнитное поле возмущает метрику. Гипотеза магнитной неоднородности высказана Зельдовичем (1969), но не находит доводов, которые обосновывали бы ее предпочтительность (см. об этой гипотезе § 3 гл. 19).

§ 7. Квазиизотропное решение и гипотеза равнораспределения возмущений

Кажется заманчивой картина Вселенной, различные части которой вблизи сингулярности имеют слегка различную кривизну в один и тот же момент времени и вместе с тем расширяются подобно модели Фридмана.

Математическим выражением такой картины является квазиизотропное решение [Лифшиц и Халатников (1963а, б)], которое для уравнения состояния $P=\varepsilon/3$ описывается метрикой

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - [t a_{\mu\nu}(x^\alpha) + t^2 b_{\mu\nu}(x^\alpha) + \ldots]\,dx^\mu\,dx^\nu. \quad (11.7.1)$$

Эта формула показывает, что решение содержит произвольную функцию пространственных координат $a_{\mu\nu}$. Подставляя (11.7.1) в уравнения ОТО, можно найти $b_{\mu\nu}$ и следующие члены разложения, соответствующие данному $a_{\mu\nu}$. Задание $a_{\mu\nu}$ дает полный набор начальных условий в данной задаче. Вблизи сингулярности главным является член $ta_{\mu\nu}$. Пренебрегая всеми другими членами, мы видим, что каждый элемент пространства расширяется изотропно с одной и той же постоянной Хаббла во всех направлениях. Пространственная кривизна, зависящая от $\frac{\partial^2 a_{\mu\nu}}{\partial x^\tau\,\partial x^\lambda}$, произвольна, но мала по сравнению с компонентами тензора кривизны $R_{0_\alpha 0_\beta}$ и $R_{0_\alpha \beta\gamma}$. В тензоре кривизны, с помощью которого можно подсчитать распределение плотности энергии и скорость движения вещества, главным членом являются производные по времени от $ta_{\mu\nu}$, и учет их дает для выражения плотности вещества результат, совпадающий с выражением для однородной модели Фридмана (с $P=\varepsilon/3$):

$$\rho=\frac{3}{32\pi G t^2}. \tag{11.7.2}$$

В этом порядке плотность не зависит от координат, скорость вещества относительно выписанной системы координат равна нулю. Примером квазиизотропной модели является часть замкнутого мира, сшитая гладко, например, с плоским миром; мы знаем, что в обеих частях асимптотика плотности одинакова, соответствует (11.7.1).

Решение (11.7.1) показывает, что аналогичную операцию можно проделать и в более общем виде: можно соединить части искривленного пространства с неизотропной кривизной. При этом оказывается, что если в выражении для плотности энергии учесть члены следующего порядка разложения, то вместо (11.7.2) получим

$$\rho=\frac{3}{32\pi G t^2}-\frac{f(x^\alpha)}{t}. \tag{11.7.3}$$

Функция f зависит от $a_{\mu\nu}$, точнее, от ее пространственных производных. Очевидно,

$$\delta=\frac{\rho-\bar{\rho}}{\rho}=\frac{32\pi G t}{3}f(x^\alpha)\sim t. \tag{11.7.4}$$

Какие типы возмущений описывает метрика (11.7.1)?

Прежде всего, она содержит возмущения плотности (11.7.4), нарастающие $\sim t$, т. е. в ней имеется первый тип возмущений — адиабатические возмущения. Кроме того, если написать для (11.7.1) тензор скоростей деформации, то часть тензора деформации с равным нулю следом соответствует гравитационным волнам ограниченной амплитуды. В решении (11.7.1) вихревая скорость отсутствует.

Следовательно, общее квазиизотропное решение подтверждает результат, полученный при исследовании малых возмущений (см. §§ 3—5 гл. 11): фридмановское поведение вблизи сингулярности ($g_{\mu\nu}\sim t$ при $P=\varepsilon/3$, $\rho\sim t^{-2}$) совместимо с возмущениями плотности и гравитационными волнами, но не с вихревыми возмущениями.

При обсуждении адиабатических возмущений и гравитационных волн было отмечено, что необходимо конечное (хотя и малое) возмущение метрики вблизи сингулярности для того, чтобы сегодня могли иметь место конечные возмущения плотности и конечная, не исчезающая амплитуда гравитационных волн.

Таким образом, если поставить вопрос о космологическом решении, не противоречащем современному состоянию Вселенной и минимально уклоняющемся от строго однородного решения при $t\to 0$, то ответом явится квазиизотропное решение.

При этом

$$R_{kl}(r) \sim r^l \quad \text{при} \quad kr \ll 1. \tag{11.8.4}$$

Дальше асимптотика различна в зависимости от того, $k>1$ или $k<1$. В первом случае в области $kr>l$, $r<1$ есть плоская промежуточная асимптотика $R \sim r^{-1} \sin kr$. В области $r>1$ асимптотика существенно связана с гиперболичностью метрики мира, т. е. с тем, что при больших r поверхность шара растет, как

$$4\pi \operatorname{sh}^2 r \gg 4\pi r^2.$$

Поскольку r ограничено только снизу, $r \geqslant 0$, при любом целом l возможно любое действительное k, в целом спектр непрерывен, что и естественно для бесконечного объема.

В этом отношении гиперболический мир подобен плоскому миру и отличается от замкнутого. В плоском мире плоские волны и сферические гармоники представляют собой два равноценных способа описания возмущений. При одном и том же собственном числе k^2 возмущение можно описывать совокупностью плоских волн различных направлений или совокупностью сферических волн с различными l, m. Переход от одного способа описания к другому вполне аналогичен повороту системы координат *).

В системе плоских волн легко выразить статистическую однородность и изотропию пространства.

Система сферических волн имеет свои преимущества для описания картины, наблюдаемой из данной точки, которую удобно принять за начало координат.

Плоские волны с данным k^2 различного направления статистически равновероятны. Отсюда следует, что при правильной нормировке угловых функций

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_{lm}^2(\theta, \psi)\, d\cos\theta\, d\varphi = 1$$

равновероятны сферические волны, нормированные на одинаковую асимптотику $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(kr+\varphi l)}{r}$ на бесконечности, при $r \to \infty$.

Итак, возмущение плотности равно

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \int dk C_{k00} R_{k0}(r) P_{00}(\theta) + \int dk C_{k10} R_{kl}(r) P_{10}(\theta) + \\ + \int dk C_{k11c} R_{kl} P_{11}(\theta) \cos\varphi + \int dk C_{k1s} R_{kl} P_{11}(\theta) \sin\varphi + \\ + \int dk C_{k22s} R_{k2}(r) P_{22}(\theta) \sin 2\varphi + \ldots \tag{11.8.5}$$

---

*) Этот переход есть поворот в гильбертовом функциональном пространстве.

функции одной скалярной переменной k (модуля волнового вектора) C_k... с различными индексами являются случайными функциями.

Однородность и изотропия Вселенной, включающие статистическую однородность и изотропию возмущений, означают, что C_k... с различными значениями индексов l, m, s или c одинаковы, имеют одинаковый средний квадрат и независимы, не коррелированы между собой.

Возмущение плотности в точке наблюдения (в начале координат, $r=0$) зависит только от первого интеграла, от C_{k0}, так как только $R_{k0}(0)\neq 0$:

$$\delta\rho(0)=\bar{\rho}\int dkC_{k00}k\frac{1}{\pi\sqrt{2}}.$$

Движение относительно реликтового излучения вещества, находящегося в начале координат, записанное через компоненты скорости, зависит от следующих трех интегралов и только от них:

$$\left.\begin{aligned} u_x(0)&=H\int dkC_{k11c}\frac{1}{\pi\sqrt{6}},\\ u_y(0)&=H\int dkC_{k11s}\frac{1}{\pi\sqrt{6}}\\ u_z(0)&=H\int dkC_{k10}\frac{1}{\pi\sqrt{6}}\end{aligned}\right\}\qquad(11.8.6)$$

$\left(\text{все для плоского мира, } \Omega=1,\ H=\frac{2}{3t}\right)$.

Среднестатистические величины даются выражениями

$$\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2}=\int|\bar{C}_k|^2\frac{k^2}{2\pi^2}dk,\qquad(11.8.7)$$

$$\overline{u^2}=H^2\int|\bar{C}_k|^2\frac{dk}{2\pi^2},\qquad(11.8.8)$$

где $|\bar{C}_k|^2$ — средний квадрат случайной функции, общий для всех (различных) l и m.

Положение наблюдателя нельзя считать случайным — возникновение Галактики, Солнца, цивилизации наиболее вероятно там, где $\delta\rho>0$.

С помощью сферических функций наиболее удобно рассматривается вопрос о периодическом распределении тех или иных объектов.

Упорные поиски таких закономерностей проводит Дж. Бэрбидж. В гл. 4 описаны рождение и гибель гипотезы о концентрации квазаров при $z=1{,}95$. В последнее время Бэрбидж и О'Делл (1972) с помощью анализа Фурье установили, что в распределении квазаров по величине красного смещения есть периоды $\Delta z=0{,}031$ и $\Delta z=$

$=0{,}062$. Мы не будем здесь обсуждать, насколько статистически значимы эти выводы (надежность их невелика), а обратимся к следующему вопросу. Какого рода периодичность совместима с предположением о космологической природе красного смещения спектров квазаров?

В этом случае красное смещение связано с расстоянием r (сопутствующей координатой) формулой

$$r=\int\frac{dt}{b(t)}=\frac{1}{b_0H_0}\int\limits_0^z\frac{dz}{(1+z)^{3/2}}=\frac{2}{b_0H_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right). \qquad (11.8.9)$$

Подсчитанное по всему небу (проинтегрированное по θ и φ) число квазаров зависит только от нулевой гармоники, $l=0$. Крайнее предположение, соответствующее выраженной периодичности и заключается в том, что $C_k=A\delta(k-k_0)$.

Таким образом, можно ожидать распределения

$$n=\bar{n}\left(1+\alpha\frac{\sin\psi}{\psi}\right), \qquad \psi=\beta\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right). \qquad (11.8.10)$$

Максимальное значение α, при котором n везде положительно, равно $\alpha\approx4{,}5$. Потребуем, далее, чтобы период был равен $\Delta z\approx0{,}062$ при малых z; получим $\beta=200$. Тогда при $z\approx2$ период равен $\Delta z\approx$ $\approx0{,}3$, а амплитуда $\left|\frac{n-\bar{n}}{\bar{n}}\right|_{\max}$ составляет всего 0,05. Такой ход кривой существенно отличается от простой периодической зависимости Бэрбиджа и О'Делла. Разложение возмущений по сферическим волнам подсказывает другой способ обработки наблюдений. Нетрудно вывести и формулы для гиперболического мира.

В гиперболическом мире плоских волн нет, и только с помощью сферических волн можно безупречно ввести понятие о статистической однородности и изотропии Вселенной.

В выражении для скорости наблюдателя относительно реликтового излучения u было допущено упрощение: предполагалось, что возмущения представляют собой растущие моды движения вещества на фоне покоящегося излучения. Такое приближение вполне оправдано в случае волн, коротких по сравнению с расстоянием до горизонта, $ct\sim c/H$. Длинные волны вовлекают излучение в движение вместе с веществом; при этом уменьшается и в пределе $\lambda\to\infty$ стремится к нулю скорость вещества относительно излучения, наблюдаемая как дипольная компонента в $\Delta T/T$. Детальный расчет этого эффекта, особенно в гиперболическом мире ($\Omega<1$), требует использования метода сферических волн.

Следует ожидать, что в ближайшее время метод сферических волн найдет широкое применение в теории возмущений однородной изотропной Вселенной.