ГЛАВА 12

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Случайность и фурье-анализ

В предыдущих параграфах с максимальной точностью рассмотрено поведение отдельного возмущения с периодической зависимостью от пространственных координат — «плоской волны».

Такой тип возмущения был выбран для рассмотрения в связи с математическим упрощением задачи, сводящейся к исследованию зависимости амплитуды и фазы возмущения от времени. Пространственное распределение возмущения эволюционирует так, что длина волны растет пропорционально радиусу мира. Решающим в выборе исследуемого решения является тот факт, что, пока возмущения малы, любое произвольно распределенное в пространстве возмущение может быть представлено в виде суммы плоских волн и каждое слагаемое ведет себя так же, как одна-единственная отдельная волна.

Ниже мы переходим к исследованию разложения возмущений произвольной формы по плоским волнам и обратной задачи — свойств различных комбинаций плоских волн.

При малой — но не слишком малой — амплитуде возмущений можно продвинуть теорию на один-два шага вперед, рассматривая взаимодействие волн между собой как поправку к линейной теории. В некоторых простых случаях удается решить точно (или приближенно) полную нелинейную задачу.

Характерной особенностью космологических задач является хаотический характер возмущений; с его рассмотрения мы и начнем.

Даже первый мимолетный взгляд на карту распределения галактик показывает, что их расположение и форма в большой степени являются случайными. Ясно, что статистические методы необходимы для описания структуры Вселенной в масштабах галактик и скоплений галактик. Статистические методы также являются (или должны являться) важной частью эволюционной теории и особенно теории развития возмущений. Хотелось бы, приняв случайные начальные возмущения и применяя к ним фундаментальную теорию (гравитация, взаимодействие с излучением и т. д.), получить статистические законы наблюдаемой Вселенной. Основные положения статистического описания, статистических законов и теории вероятности недостаточно знакомы большинству читателей и нуждаются в объяснениях.

В простейшем виде, например в связи с бросанием монеты, или игральных костей, случайность определяется как противоположность какой-либо функциональной зависимости. Результат каждого последующего события не должен зависеть от прошлых событий (если игрок честный!). Первая трудность в наших задачах заключается в том, что мы работаем не с дискретными испытаниями и величинами (отдельные бросания с ответом «да» или «нет» в примере с монетой), а с функциями непрерывных переменных, например плотностью как функцией пространственных координат и времени. С помощью искусственного разделения пространства на отдельные ячейки можно ввести дискретный набор $\bar{\rho}_i$ (средняя плотность в ячейке с индексом i). Предположим, что $\bar{\rho}_i$, $\bar{\rho}_k$ и т. д. независимы; очень скоро эта независимость будет разрушаться физическим взаимодействием с веществом в соседних ячейках. Эти соображения показывают, что приближение ячеек нецелесообразно. Сама форма описания должна быть приспособлена к характеру процессов, происходящих в рассматриваемых системах.

В тех случаях, когда однородное распределение вещества является разумным первым приближением, плоские волны, естественно, выделяются простыми свойствами, как показано в предыдущих главах. Плоские волны в линейном приближении изменяются независимо друг от друга, т. е. не взаимодействуют. Поэтому можно использовать фурье-разложение случайных функций.

Большие успехи достигнуты в использовании случайных переменных и их фурье-разложений в связи с теорией турбулентности, теорией плазмы и в радиотехнике. Лучшим, известным авторам, руководством по этим вопросам применительно к гидродинамике является замечательная книга Монина и Яглома (1965, 1967).

Фурье-разложение скалярной функции ρ, заданной в объеме V, может быть записано в виде (при пользовании комплексными величинами подразумевается, что надо взять лишь действительную часть)

$$\delta(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum A_k e^{ikx}, \qquad (12.1.1)$$

где

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int\limits_V \frac{\rho(x, y, z) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} e^{-ikx}\, d^3x\ {}^{*}).$$

---

*) Следует обратить внимание, что мы в этой главе используем волновые векторы $\boldsymbol{k}$ в физическом пространстве в отличие от используемого в предыдущей главе $\boldsymbol{\varkappa}$— волнового вектора в лагранжевых координатах. Вектор $\boldsymbol{k}$ более удобен при непосредственном сравнении с наблюдениями. Подчеркнем, что $\boldsymbol{k}$ зависит от расширения Вселенной, т. е. от времени. Эта зависимость явно учитывается в вычислениях § 4 этой главы.

Отметим прежде всего, что производится разложение по системе ортогональных нормированных функций

$$\delta = \sum A_k \psi_k(x),$$

где

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikx},$$

с условиями ортогональности и нормировки

$$\int \psi_k \psi_{k'} \, dV = \delta_{k,\,k'},$$

$$\delta_{k,\,k'} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq k', \qquad \delta_{k,\,k'} = 1 \quad \text{при} \quad k = k'.$$

Но из условия нормировки следует, что функции ψ имеют размерность $V^{-1/2}(см^{-3/2})$. Так как $\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ безразмерно, то коэффициенты A_k, очевидно, имеют размерность $см^{3/2}$.

Иметь дело с размерными коэффициентами неудобно: даже зная численное значение A_k, нельзя сказать, велики или малы возмущения. Поэтому в дальнейшем (учитывая также статистический характер задачи) мы введем безразмерную величину Δ, пропорциональную квадрату амплитуды $|A_k|^2$, усредненному по нескольким соседним функциям:

$$\Delta = \frac{1}{2\pi^2 n} \sum |A_k|^2 k^3,$$

где n — число членов суммы. Величина Δ безразмерна, так как размерность $|A_k|^2$ есть $см^3$, k^3 — $см^{-3}$, множитель $2\pi^2$ введен для удобства. Если при всех волновых векторах безразмерное Δ мало, то мало и возмущение плотности. Доказательство будет дано ниже, при рассмотрении предела $V \to \infty$.

Волновой вектор $\boldsymbol{k}$ может принимать одно из дискретных значений, допустимых для данного ограниченного объема V. Например, если объем кубический и задано условие периодичности $\delta(L, y, z) = \delta(0, y, z)$ и аналогично по y, z, то

$$V = L^3, \qquad k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \qquad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \qquad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \tag{12.1.2}$$

где n_x, n_y, n_z — целые числа.

Для определенности постоянную часть Δ, соответствующую A_k при $n_x = n_y = n_z = 0$, исключим из суммирования. В данном случае это оправдано тем, что по определению среднее возмущение в данном объеме $\bar{\delta}_V = 0$, если под $\bar{\rho}$ понимать среднюю плотность по данному объему V. Проблемы, связанные с переходом к бесконечному пространству $V \to \infty$, обсуждаются ниже. Разумное определение случайной функции состоит в том, что ее коэффициенты Фурье случайны. Идея заключается в том, что эта случайность не разрушается физическим взаимодействием, по крайней мере пока возмущение мало, в линейном приближении. Следовательно, предположение о случайности фурье-компонент лучше, чем предположение о случайности значений в различных ячейках.

Гипотеза случайности связана с идеей, что мы можем выбрать во Вселенной много различных объемов V_1, V_2, V_3,... Каждый из них называется реализацией, имеющей единственную определенную плотность $\rho=\bar{\rho}[1+\delta(x, y, z)]$ и единственный набор A_k. Рассматривая эти объемы совместно, мы можем спросить: как часто встречается данное значение A_k? Следовательно, мы можем ввести вероятность $P(A_k)$ — или для многих волн сразу $P(A'_k, A''_k, \ldots)$ — появления данных значений коэффициентов Фурье. В линейной теории проще пользоваться записью в комплексной форме. Тогда $A_k=B_k+iC_k$ (B и C — действительные) и более удобно говорить о $P(B'_k, C'_k; B''_k, C''_k; \ldots)$. Если взять N объемов, то число объемов dN, в которых B'_k лежит между B'_k и $B'_k+dB'_k$, равно

$$dN=N\cdot P(B'_k)\,dB'_k. \tag{12.1.3}$$

Для случайного распределения интересующей нас величины A_k естественно предположить, что $P(B'_k, C'_k; B''_k, C''_k; \ldots)$ равно произведению членов типа $\exp\left(-\frac{B_k^2}{2\beta_k^2}\right)\exp\left(-\frac{C_k^2}{2\gamma_k^2}\right)$ с заданными коэффициентами β_k, γ_k, определяющими средний квадрат амплитуды мод возмущений. Представление P в виде произведения множителей, зависящих только от B'_k, C'_k и т. д., (факторизация) означает, что B'_k, C'_k; B''_k, C''_k и т. д. независимы. Выбор экспоненциальной (гауссовой) формы сомножителей означает, что мы выбрали нормальный закон распределения, который хотя и не является наиболее общим законом распределения, но, как правило, осуществляется в действительности *).

Другое возможное представление есть $A_k=a_k e^{i\varphi_k}$, описываемое заданием $P(a'_k, \varphi'_k; a''_k, \varphi''_k; \ldots)$. Вместо того, чтобы брать действительную часть комплексного выражения, можно использовать условие $A^*_{-k}=A_k$, которое также обеспечивает действительность. Нормальный закон распределения A_k в этом случае означает, что

---

*) В теории вероятности доказано, что если рассматриваемая величина является суммой большого числа независимых величин $A_k=\sum_n a_{kn}$, то при любом вероятностном законе для каждого слагаемого a_{ln} получается нормальный закон для суммы A (в пределе при увеличении n).

На ранней стадии — вблизи сингулярности,— если задано поле возмущений в зависимости от координат, то интеграл, которым определяется фурье-компонента, простирается на области, причинно не связанные (если не было периода «до сингулярности»). Поэтому предположение о нормальном распределении A_k является естественным.

значение P зависит только от a_k, но не от φ_k, однако так, что $P \sim a_k \exp(-a_k^2/2\alpha_k^2)$.

Параметры β_k, γ_k, α_k определяют средние квадраты B_k, C_k, $a_k = |A_k|$. Именно с помощью этих параметров и могут быть точно сформулированы наши предположения о спектре возмущений.

Например, изотропия и однородность мира выражаются в том, что β_k, γ_k, α_k зависят лишь от модуля $\boldsymbol{k}$, но не от его направления, кроме того, $\beta_k = \gamma_k$ и $\alpha_k = \beta_k \sqrt{2}$.

Правдоподобно, что функция β_k гладкая. Мы знаем, что возмущения плотности эволюционируют со временем. Следовательно, β зависит от t. Предыдущие главы этого раздела были посвящены изучению эволюции возмущений с течением времени, т. е., по существу, изучению функции $\beta_k(t)$ (или $\beta_k(z)$). Для того чтобы полностью определить функцию $\beta_k(t)$, задающую спектр возмущений для произвольного момента времени t, необходимо в полученные ранее (§ 3 гл. 11) выражения для фурье-образов возмущений плотности $\frac{\delta\rho}{\rho}$ подставить конкретные значения коэффициентов C_1, C_2, определяемые предположением о характере спектра возмущений в некоторый определенный момент времени (скажем, при $t \to 0$).

В каждой данной реализации φ_k или B_k и C_k различны в разных направлениях; они имеют определенные значения, не гладко изменяющиеся в зависимости от k.

Понятие набора реализаций — важнейшая часть статистической теории, и мы в дальнейшем будем иметь дело с этим понятием.

§ 2. Корреляционная функция и размеры самогравитирующих объектов

Фурье-разложение очень удобно для динамических расчетов. Но функция $\beta(k, t) \equiv \beta_k(t)$ не является таким ответом, который согревает душу астрономов. Астроном имеет право спросить, каково должно быть число и форма скоплений и других объектов, которые следуют из тех или иных теорий развития возмущений в расширяющейся Вселенной. Тут теоретик должен извиниться: точная теория образования скоплений требует сложных нелинейных расчетов, выполнить которые сегодня невозможно. Все, что может сделать теоретик сегодня более или менее точно и последовательно,— это рассчитать эволюцию возмущений в периоды, когда возмущения еще малы.

Если астроном не потеряет интереса к теории уже на этой стадии обсуждения *), он спросит о неоднородностях плотности, не

*) Мы сознательно несколько сгустили краски. В действительности на основе точного анализа линейной теории и приближенного анализа нелинейных стадий теоретики делают вывод о свойствах, например, скоплений галактик, в которых $\delta\rho/\rho \gg 1$ (см. об этом последующие главы).