значение $P$ зависит только от $a_k$, но не от $\varphi_k$, однако так, что $P \sim a_k \exp(-a_k^2/2\alpha_k^2)$.

Параметры $\beta_k$, $\gamma_k$, $\alpha_k$ определяют средние квадраты $B_k$, $C_k$, $a_k = |A_k|$. Именно с помощью этих параметров и могут быть точно сформулированы наши предположения о спектре возмущений.

Например, изотропия и однородность мира выражаются в том, что $\beta_k$, $\gamma_k$, $\alpha_k$ зависят лишь от модуля $\boldsymbol{k}$, но не от его направления, кроме того, $\beta_k = \gamma_k$ и $\alpha_k = \beta_k \sqrt{2}$.

Правдоподобно, что функция $\beta_k$ гладкая. Мы знаем, что возмущения плотности эволюционируют со временем. Следовательно, $\beta$ зависит от $t$. Предыдущие главы этого раздела были посвящены изучению эволюции возмущений с течением времени, т. е., по существу, изучению функции $\beta_k(t)$ (или $\beta_k(z)$). Для того чтобы полностью определить функцию $\beta_k(t)$, задающую спектр возмущений для произвольного момента времени $t$, необходимо в полученные ранее (§ 3 гл. 11) выражения для фурье-образов возмущений плотности $\frac{\delta\rho}{\rho}$ подставить конкретные значения коэффициентов $C_1$, $C_2$, определяемые предположением о характере спектра возмущений в некоторый определенный момент времени (скажем, при $t \to 0$).

В каждой данной реализации $\varphi_k$ или $B_k$ и $C_k$ различны в разных направлениях; они имеют определенные значения, не гладко изменяющиеся в зависимости от $k$.

Понятие набора реализаций — важнейшая часть статистической теории, и мы в дальнейшем будем иметь дело с этим понятием.

## § 2. Корреляционная функция и размеры самогравитирующих объектов

Фурье-разложение очень удобно для динамических расчетов. Но функция $\beta(k, t) \equiv \beta_k(t)$ не является таким ответом, который согревает душу астрономов. Астроном имеет право спросить, каково должно быть число и форма скоплений и других объектов, которые следуют из тех или иных теорий развития возмущений в расширяющейся Вселенной. Тут теоретик должен извиниться: точная теория образования скоплений требует сложных нелинейных расчетов, выполнить которые сегодня невозможно. Все, что может сделать теоретик сегодня более или менее точно и последовательно,— это рассчитать эволюцию возмущений в периоды, когда возмущения еще малы.

Если астроном не потеряет интереса к теории уже на этой стадии обсуждения *), он спросит о неоднородностях плотности, не

*) Мы сознательно несколько сгустили краски. В действительности на основе точного анализа линейной теории и приближенного анализа нелинейных стадий теоретики делают вывод о свойствах, например, скоплений галактик, в которых $\delta\rho/\rho \gg 1$ (см. об этом последующие главы).

превышающих 10—20% от средней, к которым линейная теория применима. Но даже для этих (значительно менее интересных) неоднородностей астроном хочет знать их форму и амплитуду в тот или иной момент времени, а не довольно абстрактную функцию $\beta(k, t)$.

Так возникает проблема перехода от фурье-языка к описанию пространственного распределения отдельных тел. Для отдельной реализации ответ дается немедленно [см. (12.1.1)]. Но при статистическом подходе вопрос, какова функция $\rho(x, y, z)$, не имеет смысла. Мы можем говорить о средних величинах, усредненных по множеству реализаций. В космологической задаче усреднение по реализациям означает рассмотрение множества одинаковых объемов, расположенных повсюду в однородной Вселенной. Иными словами, нахождение усредненных по реализациям величин означает нахождение средних по пространству характеристик возмущений во Вселенной.

Очевидно, по определению $\overline{\delta(x, y, z)}=0$, т. е. среднее значение $\overline{\delta(x, y, z)}$ равно нулю в каждой точке пространства. Имеет смысл говорить о среднем квадрате $\overline{\delta^2(x, y, z)}$. Используя свойства фурье-рядов, легко показать, что

$$\overline{\delta^2(x, y, z)}=\frac{1}{V}\sum \overline{A_k^2}.$$

Рассмотрим среднее по всем реализациям и одновременно произведем переход к пределу $V\to\infty$, а от суммирования перейдем к интегрированию:

$$\overline{\delta^2(x, y, z)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \overline{A_k^2}\,d^3k=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \beta_k^2\,d^3k=\Delta. \qquad (12.2.1)$$

Величина $\delta^2$, усредненная по реализациям, не зависит от координат. При нормальном законе распределения для $B_k$, $C_k$ закон распределения для $\delta$ также нормальный:

$$P(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}}e^{-\delta^2/2\Delta}. \qquad (12.2.2)$$

В левой части стоит вероятность данного значения $\delta$ в любой данной точке. Величина $\Delta$, очевидно, одинакова для всего пространства и зависит только от времени.

Эти формулы характеризуют амплитуду неоднородностей, но ничего не говорят об их пространственной структуре. Характеристикой пространственной структуры неоднородностей является корреляционная функция $f(\boldsymbol{r})$. Она определяется формулой

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{\overline{\delta(\boldsymbol{x}_1)\,\delta(\boldsymbol{x}_2)}}{\overline{\delta^2}}, \qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2. \qquad (12.2.3)$$

Каков смысл корреляционной функции? Представим себе пространство, разбитое на области с $\delta>0$ и $\delta<0$ и средним размером $r_0$. Выберем точку $\boldsymbol{x}_1$ внутри области, где $\delta>0$, так что $\delta(\boldsymbol{x}_1)>0$. При удалении от этой точки на расстояние меньше $r_0$ мы с большой вероятностью остаемся в области $\delta>0$. Поэтому $\overline{\delta(\boldsymbol{x}_2)}>0$ при $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|<r_0$, $\delta(\boldsymbol{x}_1)>0$.

Произведение $\delta(\boldsymbol{x}_1)\delta(\boldsymbol{x}_2)$ положительно (с вероятностью больше половины, а значит, и в среднем), если $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|<r_0$.

Благодаря квадратичности выражения $f(\boldsymbol{r})$ области, где $\delta$ отрицательно, $\delta<0$, дают вклад того же положительного знака в $f(\boldsymbol{r})$. Значит $f(\boldsymbol{r})$ положительно при $r<r_0$, при $r>r_0$ $f(\boldsymbol{r})$ меняет знак.

Итак, смысл корреляционной функции таков. Пусть в некоторой точке мы задали $\delta_0$. Тогда средняя кривая, описывающая поведение $\delta$ в окрестности данной точки (0), задается $f(\boldsymbol{r})$:

$$\overline{\delta(\boldsymbol{r})}\,\Big|_{\delta(0)=\delta_0}=\delta_0 f(\boldsymbol{r}).$$

Индекс после вертикальной черты означает, что средняя кривая задается при условии $\delta(0)=\delta_0$. Заметим также, что поскольку все возмущения эволюционируют со временем, то и $f(\boldsymbol{r})$, вообще говоря, зависит от времени. Для нашего анализа эта зависимость сейчас не важна, и поэтому мы ее явно не выписываем.

Мы определили $\delta$ так, что $\bar{\delta}=\int\delta\,dV=0$. Отсюда следует, что равно нулю и среднее по объему значение корреляционной функции. В самом деле, запишем $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{r}$ и найдем

$$\int f(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}=\frac{1}{\overline{\delta^2}}\int\left[\delta(\boldsymbol{x})\left(\int\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}\right)\right]d^3\boldsymbol{x}.$$

Второй (внутренний) интеграл равен нулю, поскольку он берется о всему объему, а в этом случае выбор начала отсчета $\boldsymbol{r}$ не играет роли. Итак,

$$\int f(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}\equiv 0.$$

В однородной и изотропной в среднем Вселенной функция корреляции зависит только от абсолютной величины расстояния $r$, но не от выбора начала отсчета $r$ и не от направления вектора $\boldsymbol{r}$. Поэтому, опуская $4\pi$, имеем

$$\int_0^\infty f(r)\,r^2\,dr=0.$$

Значит, $f(r)$ обязательно должна быть знакопеременной функцией. По определению $f(0)=1$ благодаря выбору знаменателя в (12.2.3). В области $r<r_0$ $f(r)>0$. С другой стороны, где-то $f(r)$ должна быть отрицательной. Естественный вывод заключается в том, что первый нуль функции $f$, т. е. то наименьшее значение $r_1$, при котором $f(r_1)=0$, как раз и дает средний размер области, т. е. $r_0 \approx r_1$.

Не будем скрывать от читателя, что выбор определения корреляционной функции продиктован также и удобством ее вычисления, наряду с удобными для физической интерпретации свойствами.

Дадим выражение $f(r)$ через спектральную функцию $\beta(k)$, характеризующую амплитуду волн различной длины:

$$f(r)=\frac{\int\limits_0^\infty \beta^2(k)\frac{\sin kr}{kr}k^2\,dk}{\int\limits_0^\infty \beta^2(k)\,k^2\,dk}. \tag{12.2.4}$$

Зная $f(r)$, можно найти $r_0$. Если $\beta^2(k)$ сконцентрировано в узком интервале около некоторого значения $k_0$, то, как видно из (12.2.4), $r_0=\pi/k_0$, т. е. $r_0$ есть половина длины волны, соответствующей $k_0$. Теперь можно высказать первое предположение относительно момента, когда значительная доля массы перешла в гравитационно связанные объекты в ходе эволюции первоначально малых возмущений в расширяющейся Вселенной, а также относительно массы таких объектов. Предположим, что спектр возмущений $\beta(k, t)$ таков, что $\overline{\delta^2}(t)=\Delta(t)$ — растущая функция времени (в противном случае возмущения не нарастают, мы уже знаем — см. гл. 10,— что для определенных возмущений на определенных стадиях расширения Вселенной это возможно). Когда в линейной теории $\Delta$ достигает порядка единицы, то в первом приближении грубо можно считать, что процесс распада вещества на отдельные части произошел. В этот момент найдем корреляционную функцию и, в частности, определим $r_1$ — положение первого нуля. Характерная масса частей, на которые разбилось вещество, порядка $\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}r_1^3$. Ясно, однако, что при $\Delta\sim 1$ грубой становится линейная теория роста $\beta(k, t)$, и эта «грубость» складывается с «грубостью» определения характерной массы по нулю корреляционной функции.

Запишем выражение для $\overline{\delta^2}$ [см. (12.2.1)] в виде

$$\Delta=\overline{\delta^2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty (4\pi\beta^2(k)\,k^3)\,d\ln k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_k d\ln k. \tag{12.2.5}$$

Задаваемая этой формулой функция $\Delta_k=\frac{4\pi\beta^2k^3}{(2\pi)^3}$ безразмерна. Если у функции $\Delta_k$ есть широкий максимум при $k_{\max}$ (интервал $\ln k$ порядка 1), то по порядку величины

$$\Delta = \overline{\delta^2}=\Delta_k(k_{\max}). \tag{12.2.6}$$

Еще лучше от $k$ перейти к соответствующей массе $M=\rho\left(\frac{\pi}{k}\right)^3$ и определить $\Delta(M)=\frac{1}{3}\Delta(k)$ так, что

$$\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(M)d\ln M. \tag{12.2.7}$$

Первый нуль корреляционной функции примерно определяется уравнением $\sin k_{max}r_1=0$, $r_1=\frac{\pi}{k_{max}}$, — это соответствует половине длины волны моды $e^{ikr}$ при $|k|=k_{max}$. Теория зависимости от времени функции $\beta(k, t)$ была развита выше, но проблема выбора начального значения в $\beta(k, t=0)$ или в $\beta(k, t_0)$ при $t_0\neq 0$, остается нерешенной. Эта проблема спектра начальных возмущений (откуда они берутся, каковы они?) будет кратко обсуждаться в § 9 гл. 23.

## § 3. Отклонения средней плотности в данном объеме

Естественный путь описания неоднородности распределения вещества состоит в том, что надо взять сферу радиуса $r$ и определить массу, содержащуюся в этой сфере. Конечно, эта масса зависит от выбора положения центра сферы. В статистических задачах мы можем найти среднее значение массы $\overline{M}$ и среднюю величину отклонения массы от средней:

$$\mu=\frac{\sqrt{\overline{M^2}-\overline{M}^2}}{\overline{M}}. \tag{12.3.1}$$

Эта величина, рассматриваемая как функция радиуса, или объема, или самой массы, т. е. $\mu(\overline{M})$, является достаточно удобной или, по крайней мере, самой простой характеристикой неоднородности распределения вещества.

Представим себе, что вещество распределено в виде обособленных тел массы $M_1$ со средней плотностью тела $\rho_1$. Число тел в единице объема $n=\frac{\overline{\rho}}{M_1}$. Таким образом, на каждое тело в среднем приходится объем $V=n^{-1}=\frac{M_1}{\overline{\rho}}$, между тем как объем самого тела $v=\frac{M_1}{\rho_1}$. Для простоты предполагаем, что все вещество собралось в отдельные тела, так что между телами вещества не осталось.

Ясно, что в этом случае функция $\mu(\overline{M})$ ведет себя следующим образом: