Еще лучше от k перейти к соответствующей массе $M=\rho\left(\frac{\pi}{k}\right)^3$ и определить $\Delta(M)=\frac{1}{3}\Delta(k)$ так, что

$$\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(M)d\ln M. \qquad (12.2.7)$$

Первый нуль корреляционной функции примерно определяется уравнением $\sin k_{max} r_1=0$, $r_1=\frac{\pi}{k_{max}}$, — это соответствует половине длины волны моды e^{ikr} при $|k|=k_{max}$. Теория зависимости от времени функции $\beta(k, t)$ была развита выше, но проблема выбора начального значения в $\beta(k, t=0)$ или в $\beta(k, t_0)$ при $t_0\neq 0$, остается нерешенной. Эта проблема спектра начальных возмущений (откуда они берутся, каковы они?) будет кратко обсуждаться в § 9 гл. 23.

§ 3. Отклонения средней плотности в данном объеме

Естественный путь описания неоднородности распределения вещества состоит в том, что надо взять сферу радиуса r и определить массу, содержащуюся в этой сфере. Конечно, эта масса зависит от выбора положения центра сферы. В статистических задачах мы можем найти среднее значение массы $\overline{M}$ и среднюю величину отклонения массы от средней:

$$\mu=\frac{\sqrt{\overline{M^2}-\overline{M}^2}}{\overline{M}}. \qquad (12.3.1)$$

Эта величина, рассматриваемая как функция радиуса, или объема, или самой массы, т. е. $\mu(\overline{M})$, является достаточно удобной или, по крайней мере, самой простой характеристикой неоднородности распределения вещества.

Представим себе, что вещество распределено в виде обособленных тел массы M_1 со средней плотностью тела ρ_1. Число тел в единице объема $n=\frac{\overline{\rho}}{M_1}$. Таким образом, на каждое тело в среднем приходится объем $V=n^{-1}=\frac{M_1}{\overline{\rho}}$, между тем как объем самого тела $v=\frac{M_1}{\rho_1}$. Для простоты предполагаем, что все вещество собралось в отдельные тела, так что между телами вещества не осталось.

Ясно, что в этом случае функция $\mu(\overline{M})$ ведет себя следующим образом:

1) При $\overline{M} \gg M_1$ в объем, рассматриваемый при вычислении μ, входит много $\left(\frac{\overline{M}}{M_1}\right)$ тел, так что μ мало: $\mu<1$ при $\overline{M} \gg M_1$, $\mu \to 0$ при $\overline{M} \to \infty$.

2) При $\frac{\bar{\rho}}{\rho_1} M_1 < \overline{M} < M_1$ в рассматриваемый объем иногда входит одно тело, иногда — ни одного. Можно показать [см. (12.3.3)], что в этой области (при некоррелированном размещении отдельных тел)

$$\mu \approx \sqrt{\frac{M_1}{\overline{M}}} > 1.$$

Если размещение отдельных тел подчиняется какому-либо другому статистическому закону, то формула для μ будет иная, но общим свойством всех формул является то, что в этом интервале $\overline{M}$ функция $\mu(\overline{M})$ проходит через единицу, плавно сшивая области 1) и 3).

3) Наконец, при $\overline{M} < \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} M_1$, т. е. при $\overline{M} < \bar{\rho} v$, рассматриваемый объем меньше объема одного тела. При этом, если у тел нет структуры (плотность ρ_1 постоянна внутри тела), получим, что μ не зависит от M, не растет с дальнейшим уменьшением M:

$$\mu \approx \sqrt{\frac{\rho_1}{\bar{\rho}}} > 1.$$

В свою очередь, имея такую кривую $\mu(\overline{M})$, можно получить представление о характере распределения вещества. Так, например, значение $\overline{M}$, при котором μ начинает быстро возрастать и проходит через 1, характеризует массу отдельных тел. Неоднородное распределение плотности внутри отдельных тел привело бы к дальнейшему подъему μ в области еще меньших $\overline{M}$. Однако эта структура отдельных тел не сказывается на ходе кривой $\mu(\overline{M})$ при $\overline{M} > \bar{\rho} v$. Заманчиво использовать зависимость $\mu(\overline{M})$ для систематизации наблюдений и для сравнения с выводами теории.

Если распределение вещества задано коэффициентами фурье-разложения, то $\mu(\overline{M})$ определяется формулой

$$\mu^2(\overline{M}) = \frac{9}{4\pi} \int_0^\infty \beta^2(k)\,(kr)^{-3}\, J^2_{3/2}(kr)\, k^2\, dk, \qquad (12.3.2)$$

где $\overline{M} = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} r^3$ и $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\,[\sin x - x \cos x]$ — функция Бесселя.

Будем по-прежнему рассматривать случай концентрации вещества в обособившиеся объекты массы M_1. Какова функция $\mu(\overline{M})$ для $\overline{M} \gg M_1$, т. е. для объемов, содержащих несколько объектов?

Наивный ответ на этот вопрос заключается в том, что отдельные объекты ведут себя подобно статистически независимо распределенным частицам. Их среднее число $\overline{N} = \frac{\overline{M}}{M_1}$ и

$$\mu = \frac{\sqrt{\overline{\Delta N^2}}}{\overline{N}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{N}}} = \sqrt{\frac{M_1}{\overline{M}}} < 1 \quad \text{при} \quad \overline{M} > M_1. \qquad (12.3.3)$$

Но этот ответ неверен! В действительности общего ответа нет — ход кривой в области, где $\mu < 1$, зависит от спектра возмущений β_k и от процесса обособления, поэтому изучение малых μ может дать ценнейшую информацию о Вселенной [Зельдович (1965 г)].

Каковы основные предположения, приводящие к закону $\Delta N = \sqrt{\overline{N}}$?

Закон $\Delta N = \sqrt{\overline{N}}$ получается в предположении случайного, некоррелированного размещения отдельных объектов в пространстве. Можно сказать, что этот закон соответствует гипотезе о боге, который откуда-то извне засевает пространство Вселенной объектами (например, галактиками); предполагается, что вероятность каждой следующей галактики попасть в тот или иной участок пространства постоянна и одинакова во всех точках, не зависит от того, как распределены в пространстве предыдущие галактики.

Божественная гипотеза, очевидно, неприемлема. Естественная постановка вопроса заключается в эволюционном рассмотрении образования изучаемых объектов (галактик или скоплений галактик). Предполагается, что вначале плазма была распределена почти равномерно и образование галактик есть результат роста малых возмущений вследствие гравитационной неустойчивости.

На первый взгляд такая гипотеза приводит к вполне определенному выводу о том, что ΔN должно быть меньше, чем $\sqrt{\overline{N}}$, меньше, чем в гипотезе «случайности». В процессе роста возмущений увеличение плотности в каком-то месте и образование гравитационно связанного объекта есть результат притока вещества из соседних областей. Казалось бы, отсюда следует вывод, что вероятность образования другой галактики рядом с данной меньше, чем вдали. Такая отрицательная корреляция должна привести к уменьшению флуктуаций в больших объемах с большим $\overline{N}$. Однако это простое рассуждение, справедливое, например, в случае образования капелек тумана в переохлажденном паре, несправедливо в случае гравитационной неустойчивости. Глубокая причина заключается в том, что сила тяготения дальнодействующая.

Представим себе избыток плотности, сосредоточенный в небольшом объеме. Поле тяготения избыточной массы δM характеризуется потенциалом, убывающим, как $\delta\varphi = -\frac{G\delta M}{r}$, соответствующее ускорение равно $-\frac{G\delta M}{r^2}$ и направлено к центру. Движение, вызванное таким ускорением, характеризуется радиальной скоростью

$$u_{\text{рад}} = -\frac{G}{r^2}\int^t \delta M(t)\,dt.$$

Поток вещества, переносимый через сферу радиусом r внутрь, равен

$$q = 4\pi r^2\rho\,|u_{\text{рад}}| = 4\pi G\rho\int^t \delta M\,(t)\,dt.$$

Отсюда можно построить уравнение

$$\frac{d}{dt}\,\delta M = 4\pi G\rho\int^t \delta M\,(t)\,dt,$$

решения которого совпадают с джинсовской теорией (см. гл. 9):

$$\delta M_i = \text{const}\, e^{\sqrt{4\pi G\rho}\,t}, \qquad \delta M_d = \text{const}\, e^{-\sqrt{4\pi G\rho}\,t}.$$

Здесь, однако, наша цель — подчеркнуть зависимость $u \sim 1/r^2$, при которой количество вещества во всех промежуточных слоях не изменяется (поток q не зависит от r или $\operatorname{div} u = 0$). Можно сказать, что увеличение массы в центре происходит за счет притока массы из бесконечности, а не из соседних областей! Значит, при действии гравитационной неустойчивости нет *обязательной* антикорреляции соседних галактик.

Выше, в § 3 гл. 9, было показано, что малые возмущения растут подобно, не меняя формы.

Окончательный вывод заключается в том, что тот или иной закон флуктуаций $\Delta N = f(N)$ в распределении отдельных объектов зависит от начального спектра исходных малых возмущений. В принципе, в зависимости от спектра начальных малых возмущений, возможно, например, как $\Delta N \sim N^{-1/6}$, так и $\Delta N \sim N^{2/3}$. Исследование флуктуаций может дать такую информацию о начальном состоянии, которую современная теория не может предсказать (пока!), исходя из одних общих законов физики.

Поучительно проанализировать положение с помощью фурье-спектра. Отдельный объект объемом v размера $l \sim v^{1/3}$ описывается условием $A_k = \text{const}$ (не зависит от k) при $kl < 1$. Случайно распределенные объекты имеют также спектр $\beta_k = \text{const}$. В этом случае

$$\mu \sim r^{-3/2} \sim V^{-1/2} \sim M^{-1/2}, \qquad \Delta N \sim \sqrt{N}. \qquad (12.3.4)$$

Если есть корреляция в распределении объектов, то коэффициенты A_k, относящиеся к различным объектам, взаимно уничтожаются и $\beta_k \to 0$ при $k \to 0$, например:

$$\beta(k) \sim k^{\alpha^*}, \qquad \alpha^* > 1. \tag{12.3.5}$$

Подставляя такое $\beta(k)$ в формулу (12.3.2), получим $(r \to \infty)$

$$\mu \sim r^{-2} \sim \overline{M}^{-2/3}, \qquad \Delta N \sim N^{1/3}.$$

Ответ оказывается независимым от значения α^*. Это разочаровывает: мы собирались измерять μ и узнать что-то о показателе спектра α^*. Причина разочарования заключена в определении μ.

Взяв сферу с данным радиусом r, мы введем флуктуации даже в случае наиболее регулярного распределения объектов. Пусть объемная плотность будет постоянна в больших масштабах. Даже в этом случае добавление или убирание отдельного объекта, лежащего вблизи поверхности большого шара радиуса R, изменяет общую массу внутри шара. Число объектов вблизи поверхности

$$N_s = 4\pi R^2 r_1, \tag{12.3.6}$$

($r_1 = n^{-1/3}$ — среднее расстояние от одного объекта до соседнего) и

$$\Delta N = \Delta N_s = \sqrt{N_s \frac{R}{r_1}} \sim N^{1/3}. \tag{12.3.7}$$

Следовательно, неудовлетворительность определения μ заключается в том, что берется шар с четкой границей. Случайность положения объектов вблизи границы сильно влияет на результат. Надо ввести взвешивающую функцию, которая равна единице внутри шара и плавно спадает к краям, «размазывая» тем самым резкость границы.

Для того чтобы исследовать регулярность распределения объектов в данном масштабе порядка R, попробуем определить

$$M(R) = 4\pi \int_0^\infty \rho e^{-(r/R)^2} r^2 \, dr \tag{12.3.8}$$

или, в случае точечных масс,

$$M(R) = \sum_i m_i e^{-(r_i/R)^2}. \tag{12.3.9}$$

Очень важно, что в новом определении отсутствует резкая граница.

При этом эффективный объем порядка R^3, формулы (12.3.8) и (12.3.9) соответствуют $\overline{M}=\pi^{3/2}R^3\rho$.

Небольшие перемещения объектов не приводят к большому изменению $M(R)$, а значит и μ, как это было при использовании старого определения.

С новым определением M выполним всю процедуру расчета $\overline{M}$ и μ, усредняя по произвольному выбору положения центра шара. С другой стороны, обращаясь к фурье-представлению *) для μ:

$$\mu^2=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \beta^2(k)\, e^{-k^2R^2/4}\, k^2\, dk,$$

находим

$$\mu \sim R^{-3/2-\alpha^*} \sim M^{-1/2-\alpha^*/3}, \tag{12.3.10}$$

чему соответствуют отклонения числа объектов от средних $\Delta N \sim N^{1/2-\alpha^*/3}$. При $\alpha^*=0$, т. е. при плоском спектре, получается «наивный» результат, соответствующий случайному, некоррелированному распределению объектов. Однако теперь влияние α^* на разумно определенное μ прослеживается при любых α^*. Например, если $\alpha^*=2$, то $\Delta N \sim N^{-1/6}$ — абсолютная флуктуация (а не только относительная $\frac{\Delta N}{N}$) убывает при $N \to \infty$.

С другой стороны, в принципе возможен (хотя и представляется маловероятным) растущий спектр возмущений, $\alpha^* < 0$.

Потребуем, чтобы сходился интеграл

$$\int\limits_0^\infty \beta^2 k^2\, dk.$$

Для этого достаточно $\alpha^* > -\frac{3}{2}$. Следовательно, про показатель $\gamma=\frac{1}{2}-\frac{\alpha^*}{3}$ можно утверждать лишь, что $\gamma < 1$,— относительные флуктуации $\frac{\Delta N}{N} \sim N^{\gamma-1}$ всегда убывают, если интеграл амплитуды возмущений конечен.

При сравнении с наблюдениями, особенно в случае $\alpha^* > 0$, необходима осторожность. Результат справедлив для плотности массы, но не для плотности светимости (L) или плотности числа галактик (для которых масса не постоянна). Лишь масса является сохраняющейся величиной. Даже если массы распределены однородно в больших масштабах, (что означает $\beta(k) \to 0$ при $k \to 0$), флуктуации отношения L_i/m_i светимости к массе для отдельных галактик

*) В формуле, приведенной ниже, $e^{-k^2R^2/4}$ есть фурье-образ взвешивающей функции, заданной формулами (12.3.8) или (12.3.9).

приводят к флуктуации

$$L(R)=\sum L_i e^{-r_i^2/R^2}, \qquad (12.3.11)$$

так что $(\Delta L)^2 \sim L$.

«Гладкость» определения $M(R)$ (12.3.8) и $\mu(R)$ с помощью гауссовой взвешивающей функции важна для принципиального понимания структуры неоднородности плотности. Но при реальном анализе наблюдений надо помнить о только что упомянутых факторах, осложняющих такой анализ.

§ 4. Ограничения и сложности линейной теории

Одна из основных задач теории гравитационной неустойчивости заключается в следующем. Пусть задан в некоторый момент (например, при $t \to 0$) спектр возмущений. Требуется сделать выводы о том, когда возникнут из возмущений отдельные объекты и каковы их свойства (масса и др.). Сравнительная легкость расчета эволюции спектра $\beta(k, t)$ после того, как задан начальный спектр, создает соблазн быстрого вывода. Необходимо уделить внимание трудностям и ограничениям, возникающим при таком подходе.

Представим себе, что распределение плотности задано и, для простоты, растет, оставаясь подобным начальному распределению. Хотелось бы взять часть пространства с $\delta > 0$ (или с $\delta > \delta_0$, с некоторым определенным δ_0) как предвестник выделяющегося объекта. Можно рассчитать число таких частей, объем каждой части и содержащуюся в ней массу. Окончательный ответ должен носить статистический характер — должен дать функцию распределения объектов по массе и другим свойствам, например значению скорости, моменту импульса и т. д.

Первая практическая трудность состоит в том, что рассчитать свойства поверхностей данного уровня $\delta = \delta_0$ для функции, заданной ее фурье-разложением,— не простая задача [см. Дорошкевич (1970)]. Ответ в окончательном виде неизвестен. Предпринимались попытки численных экспериментов. В двумерном случае Пиблс (1969б) предложил остроумный метод оптического моделирования эксперимента.

Некоторые принципиальные трудности можно предвидеть. Если δ_0 больше, чем среднеквадратичное отклонение $\sqrt{\overline{\delta^2}}$, то часть пространства с $\delta > \delta_0$ мала и распределена в виде островков, окруженных «морем» с $\delta < \delta_0$. Если же δ_0 мало или $\delta_0 = 0$, то топология частей с $\delta > \delta_0$ очень не похожа на топологию определенных астрономических объектов. Например, поверхности $\delta_0 = 0$ могут быть замкнуты вокруг «объекта» с $\delta > 0$, но с равной вероятностью эти поверхности могут быть замкнуты вокруг «дыры», окруженной более плотным веществом.