приводят к флуктуации

$$L(R)=\sum L_i e^{-r_i^2/R^2}, \qquad (12.3.11)$$

так что $(\Delta L)^2 \sim L$.

«Гладкость» определения $M(R)$ (12.3.8) и $\mu(R)$ с помощью гауссовой взвешивающей функции важна для принципиального понимания структуры неоднородности плотности. Но при реальном анализе наблюдений надо помнить о только что упомянутых факторах, осложняющих такой анализ.

§ 4. Ограничения и сложности линейной теории

Одна из основных задач теории гравитационной неустойчивости заключается в следующем. Пусть задан в некоторый момент (например, при $t \to 0$) спектр возмущений. Требуется сделать выводы о том, когда возникнут из возмущений отдельные объекты и каковы их свойства (масса и др.). Сравнительная легкость расчета эволюции спектра $\beta(k, t)$ после того, как задан начальный спектр, создает соблазн быстрого вывода. Необходимо уделить внимание трудностям и ограничениям, возникающим при таком подходе.

Представим себе, что распределение плотности задано и, для простоты, растет, оставаясь подобным начальному распределению. Хотелось бы взять часть пространства с $\delta > 0$ (или с $\delta > \delta_0$, с некоторым определенным δ_0) как предвестник выделяющегося объекта. Можно рассчитать число таких частей, объем каждой части и содержащуюся в ней массу. Окончательный ответ должен носить статистический характер — должен дать функцию распределения объектов по массе и другим свойствам, например значению скорости, моменту импульса и т. д.

Первая практическая трудность состоит в том, что рассчитать свойства поверхностей данного уровня $\delta = \delta_0$ для функции, заданной ее фурье-разложением,— не простая задача [см. Дорошкевич (1970)]. Ответ в окончательном виде неизвестен. Предпринимались попытки численных экспериментов. В двумерном случае Пиблс (1969б) предложил остроумный метод оптического моделирования эксперимента.

Некоторые принципиальные трудности можно предвидеть. Если δ_0 больше, чем среднеквадратичное отклонение $\sqrt{\overline{\delta^2}}$, то часть пространства с $\delta > \delta_0$ мала и распределена в виде островков, окруженных «морем» с $\delta < \delta_0$. Если же δ_0 мало или $\delta_0 = 0$, то топология частей с $\delta > \delta_0$ очень не похожа на топологию определенных астрономических объектов. Например, поверхности $\delta_0 = 0$ могут быть замкнуты вокруг «объекта» с $\delta > 0$, но с равной вероятностью эти поверхности могут быть замкнуты вокруг «дыры», окруженной более плотным веществом.

Глубокие корни трудностей лежат в том, что астрономические объекты есть результат сильной нелинейности, они характеризуются $\frac{\rho}{\bar\rho} \gg 1$ $\left(\frac{\rho}{\bar\rho} \approx 100\right.$ для наименее плотных объектов — скоплений галактик$\left.\right)$. Эта нелинейность полностью уничтожает симметрию между $\delta > 0$ и $\delta < 0$, характерную для линейной теории. Очевидно, что пространство с $\frac{\rho}{\rho_0} > 50$ или $\delta = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 > 49$ занимает долю не больше, чем 2% всего пространства: ни в какой части пространства нет $\delta = -49$ (и даже $\delta < -1$), потому что везде плотность положительна.

Образование астрономических объектов должно описываться нелинейной теорией. Некоторые гипотезы и результаты, полученные нелинейной теорией, изложены в следующей главе.

Чтобы закончить со статистической теорией, необходимо упомянуть вопросы, связанные с фурье-разложением случайных функций в бесконечном пространстве. В конечном объеме V мы работали с суммами. Число функций в данном интервале волнового вектора $k_x - k_x + dk_x$, $k_y - k_y + dk_y$, $k_z - k_z + dk_z$ равно $\frac{V\,dk_x\,dk_y\,dk_z}{(2\pi)^3}$, когда V возрастает, число слагаемых в выражении $\delta = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum A_k e^{ikx}$ увеличивается. Но эти слагаемые имеют случайную величину. Следовательно, их сумма пропорциональна квадратному корню из их числа. Каждое слагаемое в сумме должно быть пропорционально $V^{-1/2}$. Эти свойства необходимо иметь в виду, чтобы понять смысл интеграла $\int A_k e^{ikx} d^3x$. В линейной теории закон эволюции был получен для дискретных волн, т. е. для отдельных членов суммы. Когда же делается переход к бесконечному объему и интегралу, необходимо иметь в виду, что сумма квадратов по определенному объему в k-пространстве играет роль квадрата амплитуды данной волны, т. е.

$$\frac{\overline{A_k^2}}{V} \longrightarrow \frac{\beta_k^2}{(2\pi)^3} d^3k \quad \text{или} \quad \frac{\beta_k^2 k^3}{2\pi^2} d \ln k.$$

В ходе космологического расширения k уменьшается, $k \sim (1 + z)$, где z — красное смещение. Для одной волны закон эволюции $A_k(z)$ (для простейшего случая плоской космологической модели, заполненной пылевидным веществом) имеет вид

$$A_k(z) \sim t^{2/3} \sim (1 + z)^{-1}. \tag{12.4.1}$$

Для амплитуды интеграла Фурье

$$\Delta \sim A_k^2 \sim (1 + z)^{-2} \sim \beta_k^2 (1 + z)^3,$$

т. е.

$$\beta_k \sim (1+z)^{-5/2},$$

или, точнее, зная величину β при некотором z', можно вычислить $\beta(k, z)$ при любом z по формуле

$$\beta(k, z) = \beta\left(k\frac{(1+z)}{(1+z')};\ z'\right)\left(\frac{1+z}{1+z'}\right)^{-5/2}. \tag{12.4.2}$$

При этом k есть волновой вектор в физическом (не в сопутствующем!) пространстве. Здесь снова выявляется удобство введенных выше безразмерных функций массы $\Delta(M)$ и $\mu(M)$ [см. формулы (12.2.7) и (12.3.1)]. По порядку величины $\mu^2 = \Delta$. Постоянному значению аргумента M соответствует постоянный объем сопутствующего пространства *). В ходе эволюции $\sqrt{\Delta}$ и μ меняются по тому же закону, что и безразмерная амплитуда отдельной волны.

*) Под M мы понимаем сумму масс сохраняющихся частиц — барионов, без учета излучения.