ГЛАВА 13

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ТЕПЛОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Возмущения в пылевидной среде; задачи, допускающие точные решения

Существуют три различных пути подхода к нелинейным задачам. Один путь заключается в точном решении частных задач со специальными начальными условиями. Примером таких задач могут служить сферически-симметричные возмущения. Второй путь состоит в построении приближенного метода, экстраполирующего линейную теорию. Этот метод очень мощный, но надо всегда помнить о его ограниченной точности. Преимущество этого метода состоит в том, что он применим к общему случаю несимметричных возмущений. Наконец, третий путь состоит в выяснении качественных свойств общего точного решения; сюда относится, в частности, вопрос об особых точках решения и об асимптотических законах вблизи особых точек.

Именно сочетание всех трех методов дает наиболее надежные результаты. Хорош тот приближенный метод, который совпадает с точным решением по крайней мере в каком-то специальном случае и имеет правильную асимптотику вблизи особых точек.

Случай сферически-симметричных возмущений может быть проанализирован точно, потому что влияние соседних возмущений равно нулю. Второй метод учитывает приливное действие со стороны соседних возмущенных областей, но за это приходится расплачиваться тем, что он является приближенным *). Во всех случаях мы будем пренебрегать силами давления, считая $P=0$.

В простейшем сферически-симметричном случае шар, который является частью фридмановского мира с определенной величиной $\Omega_{в}$ **), рассматривается на фоне целого фридмановского мира с другой величиной Ω [с дырой для возмущенного шара — наподобие швейцарского сыра; сравнение, принадлежащее Эйнштейну и Штраусу (1945)].

*) Точное решение получается также для одномерного движения, в котором все величины зависят от одной декартовой координаты. Это точное решение содержится в формулах приближенной трехмерной теории.

**) Индекс «в» — возмущенный.

Если $\Omega \leqslant 1$, то возможны два случая: 1) $\Omega_в \leqslant 1$, 2) $\Omega_в > 1$.

В первом случае возмущенный шар также расширяется до бесконечного радиуса и нулевой плотности, связанный объект не образуется.

Во втором случае, который является более интересным, возмущенный шар ведет себя как замкнутый мир Фридмана. Следовательно, мы можем утверждать, что в некоторый момент времени t_m плотность в возмущенном шаре достигнет минимума, расширение прекратится и сменится сжатием. Формально это сжатие приведет к бесконечной плотности при $t_\infty = 2t_m$. Фридмановский мир с $P=0$ и $\Omega > 1$ сжимается в точку весь одновременно, и поэтому предположение $P=0$ всегда и везде в этом случае неправдоподобно. Реально при достаточно большой плотности давление даже холодного вещества уже существенно. На краю шара возникает волна разгрузки, решение становится неоднородным. Но гораздо реальнее случай, когда начальное состояние не строго симметрично или, даже будучи сферически-симметричным, неоднородно, т. е. плотность зависит от радиуса, $\rho(r)$. В этом случае также при движении с $P=0$ в некоторый момент возникает бесконечная плотность; отличие заключается в том, что $\rho=\infty$ возникает не сразу во всем объеме, а на некоторой поверхности или в одной частице вещества. В этот момент возникают ударные волны, и в последующем вещество, сжатое ударной волной, имеет $P \neq 0$. До ударной волны мы полагали энтропию равной нулю, а уравнение состояния таким, что $P(\rho, S=0) \equiv 0$. После ударной волны $S > 0$, $P > 0$ и возникнут колебания вокруг положения равновесия при конечной плотности. При колебаниях за счет диссипативных процессов кинетическая энергия переходит в тепло, амплитуда колебаний уменьшается, часть массы может быть выброшена и предельным состоянием возмущенного шара является равновесная конфигурация [Зельдович, Каждан (1970)] *).

Полная энергия «части замкнутого мира Фридмана» отрицательна; в момент остановки при смене расширения сжатием равна нулю кинетическая энергия (давлением пренебрегаем, пылевидное вещество), так что полная энергия равна в этот момент потенциальной энергии:

$$E_{полн} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_m}. \qquad (13.1.1)$$

В равновесии при той же полной энергии по теореме вириала тепловая энергия равна $-E_{полн}$, потенциальная энергия $U_{равн}$ равна

---

*) В ньютоновской теории равновесное состояние возникает всегда, в ОТО равновесие возможно только в случае, когда радиус равновесного шара больше гравитационного радиуса.

$2E_{\text{полн}}$. Следовательно,

$$U_{\text{равн}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_{\text{равн}}} = 2E_{\text{полн}} = -2\,\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_m}, \qquad (13.1.2)$$

откуда $R_{\text{равн}} = \frac{1}{2} R_m$, $\rho_{\text{равн}} = 8\rho_m$ [Пиблс (1967а)].

Этот результат является оценочным (Пиблс пренебрегает потерей массы). В равновесной конфигурации плотность не постоянна по радиусу, и поэтому $R_{\text{равн}}$ и $\rho_{\text{равн}}$ — некоторые эффективные величины.

Для более подробного анализа необходимо полное изучение сжатия после момента остановки. Это нетрудно сделать численными методами, однако результаты уточнения сильно зависят от конкретных предположений о нарушениях точной симметрии и однородности распределения плотности.

Можно предсказать, что если $\rho(r)$ имеет максимум в центре, то при сжатии возникает ударная волна и небольшая часть вещества сбрасывается с положительной энергией. Отрицательная энергия остающегося гравитационно связанного вещества увеличивается по абсолютной величине. Также увеличивается и равновесная плотность $\rho_{\text{равн}}$ [Зельдович, Каждан (1970)].

Поучительно сравнить результаты нелинейной теории с «наивными» результатами линейной теории. Простой расчет (опущенный здесь) приводит к следующим формулам нелинейной теории для возмущенного шара и значения $\Omega=1$ в невозмущенном мире.

В момент t_m, когда радиус возмущенного шара максимален, возмущенная плотность равна (напомним, что мы считаем возмущенный шар однородным)

$$\rho_m = \frac{(6\pi)^2}{64}\bar{\rho} = 5{,}5\bar{\rho}, \qquad \delta_m = 4{,}5. \qquad (13.1.3)$$

В линейной теории ($\delta = \text{const}\cdot t^{2/3}$), которая дает правильную асимптотику при $t \ll t_m$, получаем при $t = t_m$

$$\delta_{\text{лин}} = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3} = 1{,}07. \qquad (13.1.4)$$

Следовательно, в плоском мире ($\Omega=1$) малые сферически-симметричные растущие возмущения (с асимптотикой $\delta = a^* t^{2/3}$ при $\delta \ll 1$) прекратят расширение при $\delta_m = 4{,}5$ в момент $t_m = 1{,}1a^{*-3/2}$ и приведут к коллапсу, заканчивающемуся (формально) бесконечной плотностью вещества возмущенного шара, $\delta=\infty$, при $t_\infty = 2t_m = 2{,}2a^{*-3/2}$ (см. таблицу).

В случае плоского мира Фридмана с $\Omega=1$, заполненного пылевидным веществом, полная энергия каждой невозмущенной (сферической) части равна нулю и, следовательно, каждое растущее

ТАБЛИЦА X

Значение δ в линейной и нелинейной теориях

Время	$t \ll a^{-3/2}$	$t = a^{*-3/2}$	$t = 2a^{*-3/2}$
Линейная теория	$a^* t^{2/3}$	1	1,7
Нелинейная теория	$a^* t^{2/3}$	4,5	∞

возмущение (мода) *) с $\delta > 0$ имеет отрицательную энергию и приведет к прекращению расширения и коллапсу с течением времени.

В этом отношении случай сферических возмущений в мире с $\Omega < 1$ качественно отличается от случаев с $\Omega \geqslant 1$. При $\Omega < 1$ невозмущенная энергия положительна, так что существует критическая амплитуда возмущений δ_c, которая делает в шаре $\Omega_в = 1$. При $\delta > \delta_c$ будут возникать гравитационно связанные объекты, при $\delta < \delta_c$ такие объекты не возникают.

Интересно рассмотреть ранние моменты в решении, когда невозмущенная плотность велика, а возмущения малы, и найти ответ на вопрос, какова критическая величина возмущения плотности, приводящего к возникновению гравитационно связанного тела, т. е. к прекращению расширения хотя бы при $t \to \infty$.

Для вычисления δ_c надо взять нарастающую моду возмущений плотности в (11.3.1) и связанную с ней моду скорости (члены с C_2 в выражениях для $\frac{\delta\rho}{\rho}$ и u^α), добавить эти возмущения к $\bar{\rho}$ и хаббловской скорости расширения шара. В согласии с нашей моделью однородных возмущенных шаров $\delta\rho$ и u^α выбирают так, что внутри шара снова применимо решение Фридмана, но с $\Omega_в$, несколько отличной от Ω окружающего вещества. Величина δ_c соответствует $\Omega_в = 1$. Критическая величина возмущения оказывается равной

$$\delta_c = \frac{3}{5} \frac{1-\Omega}{\Omega(1+z)} . \qquad (13.1.5)$$

Полезно запомнить, что критическая величина возмущения (т. е. возмущение, которое приведет к $\rho_в \to \infty$, $\delta \to \infty$ в нелинейной теории) определяется условием $\delta = 3/2$ при $t \to \infty$ при расчете по линейной теории. Для $0 < \Omega < 1$ линейная амплитуда $\delta_{лин}$ при $z = 0$, необходимая для того, чтобы в нелинейной теории произошла остановка расширения, лежит в пределах $1{,}5 > \delta_{лин} > 1{,}07$ **). Если из-

*) Мы всегда повторяем «растущая мода», поскольку при начальном $\delta > 0$ в принципе возможно и расширение — если $\delta > 0$ и $\operatorname{div} u > 0$ (u — пекулярная скорость) возможно $E_{полн} > 0$.

**) Эта $\delta_{лин}$ соответствует моменту остановки расширения. На момент коллапса возмущенного шара $\delta_{лин} = 1{,}5$ для $\Omega = 0$ и $\delta_{лин} = 1{,}7$ для $\Omega = 1$.

вестна средняя амплитуда возмущений на ранние моменты времени, то теперь легко определить долю сконденсировавшегося вещества p^* согласно оценкам нелинейной теории для сферических возмущений. Для $\Omega=1$, очевидно, асимптотически $t\to\infty$, $p^*=0{,}5$. Действительно, половина возмущений имеет $\delta>0$ и сконденсируется, половина — $\delta<0$ и не сконденсируется. Для $\Omega=1$ или $\Omega\approx 1$ говорить о $t\to\infty$ не особенно интересно, так как эта асимптотика относится к далекому будущему и не характеризует конденсацию материи в объекты в наше время. Асимптотика $t\to\infty$ имеет смысл лишь для $\Omega\ll 1$, поскольку в этом случае доли вещества, сконденсировавшегося в настоящее время ($z=0$) и при $t\to\infty$, одинаковы, так как в линейной теории возмущения не нарастают на поздних стадиях.

Общая формула для p^* довольно сложна. Пусть в некоторый момент в прошлом, соответствующий красному смещению z, средняя амплитуда возмущений есть δ_0. Тогда доля сконденсировавшегося к нашему времени ($z=0$, $\Omega\ll 1$) вещества

$$p^*=\frac{1}{\delta_0\sqrt{\pi}}\int\limits_{\delta_c}^{\infty} e^{-\delta^2/\delta_0^2}\,d\delta, \tag{13.1.6}$$

где δ_c определяется (13.1.5).

Еще раз напомним, что все оценки этого параграфа основывались на теории сферических возмущений в веществе с $P=0$.

§ 2. Возмущения в пылевидной среде; приближенный анализ общего случая («блины»)

Из астрономических наблюдений известно, что в расширяющейся Вселенной амплитуда возмущений плотности достигает величины порядка единицы на том этапе, когда линейные размеры неоднородностей много меньше ct и много меньше радиуса кривизны a. Таким образом, теория роста неоднородностей перестает быть линейной на этапе, когда уже можно пользоваться ньютоновской физикой и релятивистские эффекты несущественны.

Описываемое ниже приближенное решение [Зельдович (1970б)] заключается в использовании лагранжевых переменных и (обоснованной) экстраполяции линейной теории. Эйлеровская координата частиц $\boldsymbol{r}$ (или x, y, z) будет записана как функция ее лагранжевых координат $\boldsymbol{s}$ в виде

$$\boldsymbol{r}=a(t)\,\boldsymbol{s}+b(t)\,\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{s}). \tag{13.2.1}$$

Прежде чем переходить к обоснованию формулы (13.2.1), сделаем следующие замечания. Первый член соответствует невозмущенному движению. Пренебрегая вторым членом, получим

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{s}\,\frac{da}{dt}=\boldsymbol{r}\,\frac{1}{a}\,\frac{da}{dt}, \tag{13.2.2}$$