вестна средняя амплитуда возмущений на ранние моменты времени, то теперь легко определить долю сконденсировавшегося вещества p^* согласно оценкам нелинейной теории для сферических возмущений. Для $\Omega=1$, очевидно, асимптотически $t\to\infty$, $p^*=0{,}5$. Действительно, половина возмущений имеет $\delta>0$ и сконденсируется, половина — $\delta<0$ и не сконденсируется. Для $\Omega=1$ или $\Omega\approx1$ говорить о $t\to\infty$ не особенно интересно, так как эта асимптотика относится к далекому будущему и не характеризует конденсацию материи в объекты в наше время. Асимптотика $t\to\infty$ имеет смысл лишь для $\Omega\ll1$, поскольку в этом случае доли вещества, сконденсировавшегося в настоящее время ($z=0$) и при $t\to\infty$, одинаковы, так как в линейной теории возмущения не нарастают на поздних стадиях.

Общая формула для p^* довольно сложна. Пусть в некоторый момент в прошлом, соответствующий красному смещению z, средняя амплитуда возмущений есть δ_0. Тогда доля сконденсировавшегося к нашему времени ($z=0$, $\Omega\ll1$) вещества

$$p^*=\frac{1}{\delta_0\sqrt{\pi}}\int\limits_{\delta_c}^{\infty} e^{-\delta^2/\delta_0^2}\,d\delta, \tag{13.1.6}$$

где δ_c определяется (13.1.5).

Еще раз напомним, что все оценки этого параграфа основывались на теории сферических возмущений в веществе с $P=0$.

§ 2. Возмущения в пылевидной среде; приближенный анализ общего случая («блины»)

Из астрономических наблюдений известно, что в расширяющейся Вселенной амплитуда возмущений плотности достигает величины порядка единицы на том этапе, когда линейные размеры неоднородностей много меньше ct и много меньше радиуса кривизны a. Таким образом, теория роста неоднородностей перестает быть линейной на этапе, когда уже можно пользоваться ньютоновской физикой и релятивистские эффекты несущественны.

Описываемое ниже приближенное решение [Зельдович (1970б)] заключается в использовании лагранжевых переменных и (обоснованной) экстраполяции линейной теории. Эйлеровская координата частиц $\boldsymbol{r}$ (или x, y, z) будет записана как функция ее лагранжевых координат $\boldsymbol{s}$ в виде

$$\boldsymbol{r}=a(t)\,\boldsymbol{s}+b(t)\,\chi(\boldsymbol{s}). \tag{13.2.1}$$

Прежде чем переходить к обоснованию формулы (13.2.1), сделаем следующие замечания. Первый член соответствует невозмущенному движению. Пренебрегая вторым членом, получим

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{s}\frac{da}{dt}=\boldsymbol{r}\frac{1}{a}\frac{da}{dt}, \tag{13.2.2}$$

т. е. хаббловский закон расширения. Лагранжевы координаты $\boldsymbol{s}$ определяются как координаты невозмущенного положения частицы в момент t_1, определяемый условием $a(t_1)=1$; поэтому $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\cdot\frac{1}{a}$ для невозмущенного решения.

Второй член в формуле (13.2.1) описывает возмущения. Форма записи (13.2.1) соответствует случаю малых растущих возмущений — в этом случае функция двух переменных $\boldsymbol{s}$ и t может быть факторизована, т. е. записана как произведение $b(t)$ на $\chi(\boldsymbol{s})$.

Действительно, в § 3 гл. 9 было показано, что в линейном приближении и при $P=0$ возмущение любой формы растет, оставаясь подобным:

$$\delta=\delta_0\left(\frac{r}{a}\right)\varphi_1(t),\qquad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0\left(\frac{r}{a}\right)\varphi_2(t).$$

При этом пространственный масштаб меняется в соответствии с общим космологическим расширением. Здесь следует сделать одну оговорку: распределение плотности может быть любым, т. е. на функцию $\delta_0\left(\frac{r}{a}\right)$ никакие ограничения не накладываются. При данной функции δ_0 распределение пекулярной скорости $\boldsymbol{u}_0$ связано с δ_0 условием $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0\sim-\delta_0$. Второе условие, которому удовлетворяет скорость, заключается в том, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_0=0$. Это условие должно выполняться в теории происхождения галактик из адиабатических возмущений, ибо мы знаем, что вихревая скорость быстро убывает в ходе космологического расширения, вихревая компонента, даже если она была в начальном спектре, не содержится в растущем решении. Другими словами, в качестве $\boldsymbol{u}_0$ можно выбрать произвольное потенциальное поле $\boldsymbol{u}_0=\operatorname{grad}\varphi$ (так что $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_0\equiv 0$), а плотность при этом $\delta\sim-\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0$. Чтобы от линейного решения перейти к предлагаемому приближенному решению нелинейной задачи, которое также будет записано в виде (13.2.1), остается сделать два шага. Первый шаг заключается в том, что мы вводим лангранжевы переменные $\boldsymbol{s}$, т. е. будем следить за движением каждой данной частицы.

В невозмущенном движении $\boldsymbol{s}\equiv\boldsymbol{r}/a$; как уже отмечалось, возмущения зависят именно от этой переменной. Когда возмущения не считаются малыми (т. е. при выходе за рамки линейной теории), выбираем в качестве переменной именно $\boldsymbol{s}$, а не $\boldsymbol{r}/a$.

Второй шаг связан с тем, что простая связь между пекулярной скоростью и плотностью также имеет место только в линейной теории. При построении (приближенной) нелинейной теории выбираем для экстраполяции именно формулу скорости линейной теории $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{s})\varphi_2(t)$. Соответствующее выражение для смещения имеет вид (13.2.1). Вычислим пекулярную скорость:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-H\boldsymbol{r}=\dot{a}\boldsymbol{s}+\dot{b}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{s})-\frac{\dot{a}}{a}(a\boldsymbol{s}+b\boldsymbol{\chi})=\frac{a\dot{b}-b\dot{a}}{a}\boldsymbol{\chi}$$

(при этом учтено, что постоянная Хаббла $H=\dot{a}/a$). Таким образом устанавливается связь между функциями φ_2 и b; пространственная зависимость $u_0(s)$ и $\chi(s)$ одинакова. Следовательно, $\chi(s)$ также является безвихревой функцией. Строгое доказательство того факта, что при потенциальности начальных возмущений движение и на нелинейной стадии остается безвихревым (до возникновения ударных волн), дано в работе Зельдовича (1970б).

Почему именно такой вариант записи линейного приближения представляется пригодным для экстраполяции в область конечных и больших возмущений? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала пылевидную среду без сил тяготения. Тогда задача о ее движении решается точно, так как все частицы движутся по инерции с постоянными скоростями. Мы считаем, что решение без учета сил тяготения может быть применимо, начиная с некоторого момента, когда $\Omega \ll 1$. Мы будем отсчитывать время t от этого момента и лагранжевы координаты $\boldsymbol{s}$ частиц выберем совпадающими с эйлеровыми $\boldsymbol{r}$ в момент $t=0$.

Решение записывается в виде

$$\boldsymbol{r}=a_0 t\boldsymbol{s}+t\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{s}. \qquad (13.2.1а)$$

Здесь первый член описывает невозмущенное расширение — милновскую расширяющуюся модель ($a_0=\mathrm{const}$), второй член дает пекулярные скорости, а третий — положение частиц в момент $t=0$. В отсутствие тяготения решение фактически имеет вид (13.2.1).

Возьмем небольшой элемент объема такой среды. Расстояние между двумя близкими частицами есть $|d\boldsymbol{r}|$, а изменение его с течением времени

$$\frac{\partial |d\boldsymbol{r}|}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{dr_i\dfrac{\partial dr_i}{\partial t}}{|d\boldsymbol{r}|}.$$

Используя (13.2.1а), получим

$$\frac{\partial |d\boldsymbol{r}|}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{dr_i}{|d\boldsymbol{r}|}\left(a_0\delta_{ik}+\frac{\partial v_i}{\partial s_k}\right)ds_k.$$

Если градиенты пекулярных скоростей (второй член в круглых скобках) достаточно велики, то $|d\boldsymbol{r}|$ может как расти со временем (в этих направлениях элемент объема растягивается), так и уменьшаться (в этих направлениях элемент объема сжимается). Относительные скорости постоянны во времени. Имеется направление, в котором скорость сжатия элемента наибольшая. Следовательно, через конечный промежуток времени элемент в этом направлении сплющится в «блин». В соседних элементах скорость сжатия и направление наибольшей скорости сжатия несколько иные, но по непрерывности в близких элементах они близки. Сплющивание элемента объема вещества в «блин» — важнейшее свойство этого решения. В принципе возможно сжатие и в нить или даже в точку, но для этого надо, чтобы скорости сжатия в двух или, соответственно, трех направлениях совпадали, что крайне маловероятно.

Посмотрим, как повлияют на решение силы тяготения. Если бы вещество сжималось в виде шара в точку, то сила тяготения нарастала бы неограниченно и кардинально бы влияла на решение. При сплющивании же в «блин» сила тяготения остается конечной даже при $\rho \to \infty$. При строго одномерной задаче эта сила для каждого элемента вообще постоянна во времени. Тяготение не меняет существенно свойства решения на нелинейной стадии. В частности, оно не меняет вывода о сплющивании в «блин», а только способствует этому явлению, несколько увеличивая со временем скорость сплющивания. Вот почему решение для нелинейной стадии с учетом тяготения следует искать в виде, похожем на решение для пылевидной среды без тяготения, только коэффициенты при слагаемых в (13.2.1) должны иначе зависеть от времени и эта зависимость определяется тяготением.

В задаче без тяготения (13.2.1а) пекулярные скорости постоянны во времени и для сжатия объема в каком-либо направлении скорости должны были быть заданы достаточно большими. В реальной задаче с тяготением эти скорости нарастают с течением времени из-за гравитационной неустойчивости и, будучи сначала малыми и описываемыми линейной теорией, в конце концов становятся большими, приводят к сплющиванию элемента в «блин».

Оценка точности предлагаемой приближенной формулы (13.2.1) для описания нелинейной стадии будет дана ниже, после исследования свойств решения.

Важное практическое достоинство формулы (13.2.1) заключается в том, что она имеет единый вид для линейных и нелинейных стадий, и, кроме того, в том, что если найдено смещение частиц, то вычисление плотности и относительной скорости легко проделать аналитически, требуется только дифференцирование, но не интегрирование. Отметим, что задачу о движении пылевидной среды ($P=0$) рассматривал Станюкович (1971). Эта задача подробно разобрана также в книге Зельдовича и Мышкиса (1973). В ОТО анализ проведен Грищуком (1967б). Итак, принимаем (13.2.1).

В линейном приближении функция $b(t)$ хорошо известна: возмущения плотности пропорциональны отношению $b(t)/a(t)$, так что это отношение можно считать известным. Приближение заключается в использовании формулы (13.2.1) для описания возмущенного движения и на нелинейной стадии, в частности даже в ходе коллапса, когда бесконечная плотность достигается по крайней мере в части массы.

Вычислим, как меняется плотность, если заданы функции $a(t)$ и $b(t)$. Очевидно, для этого надо вычислить изменение объема элемента среды. Пользуясь выражением (13.2.1), легко подсчитать деформацию объема. В результате получаем

$$\rho=\bar{\rho}a^3\frac{ds}{dr}=\bar{\rho}a^3\left(\frac{D(r)}{D(s)}\right)^{-1},$$

где $\frac{D(r)}{D(s)}$ — якобиан преобразования. Расписывая якобиан через производные, получаем

$$a^{-3}\frac{D(r)}{D(s)}=\begin{vmatrix} 1+\frac{b}{a}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{b}{a}\frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{b}{a}\frac{\partial x_3}{\partial s_1} \\ \frac{b}{a}\frac{\partial x_1}{\partial s_2} & 1+\frac{b}{a}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{b}{a}\frac{\partial x_3}{\partial s_2} \\ \frac{b}{a}\frac{\partial x_1}{\partial s_3} & \frac{b}{a}\frac{\partial x_2}{\partial s_3} & 1+\frac{b}{a}\frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{vmatrix}. \qquad (13.2.3)$$

Мы уже подчеркивали, что в решении отсутствуют вихревые движения, поэтому для каждого элемента среды можно выбрать координаты так, что матрица (13.2.3) станет диагональной. В выбранной системе выражение для ρ переписывается в виде

$$\rho=\frac{\bar{\rho}}{\left(1-\frac{b}{a}\alpha\right)\left(1-\frac{b}{a}\beta\right)\left(1-\frac{b}{a}\gamma\right)}, \qquad (13.2.4)$$

где α, β, γ — функции только s, а b/a — функция только t*). Величины α, β, γ характеризуют деформацию вдоль трех ортогональных главных осей тензора деформации и выражаются довольно сложно через совокупность производных $\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$. В общем случае $\alpha\neq\beta\neq\gamma$, и для определенности мы выберем $\alpha>\beta>\gamma$.

Возможны случаи, когда $\alpha<0$ (тогда и $\gamma<\beta<\alpha<0$). Но если $\alpha>0$ (знак β и γ произволен), а величина $\alpha\frac{b}{a}$ растет и достигает единицы в ходе эволюции, то из (13.2.4) следует, что в этот момент и в этой частице $\rho\to\infty$.

Бесконечная плотность возникает в результате одномерного сжатия вдоль оси, соответствующей α. Таким образом, из нашего приближения следует вполне определенная картина: когда возмущения становятся достаточно большими, в различных местах образуются плоские «блины» коллапсирующей пыли **).

*) Отношение b/a есть универсальная функция времени, зависящая от Ω, удобно b/a выразить через z. Напротив, α, β, γ зависят от конкретного вида начального возмущения $\chi(s)$.

**) В общем случае совокупности траекторий частиц в ньютоновской теории, пересечение траекторий и бесконечная плотность достигаются за счет движения по одной координате, так что в первый момент возникают плоские области. Пересечение вдоль линии или в точке требует дополнительных условий, возникает в вырожденной задаче. Этот результат появляется и при исследовании движения пылевидного вещества в ОТО [см. Грищук (1967а, б)]. Но надо подчеркнуть, что в реальных задачах образования галактик вполне достаточно ньютоновской теории, эффекты ОТО несущественны.

Обратимся теперь к обсуждению точности предложенного метода. Уравнения движения в лагранжевой форме имеют вид

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla\varphi, \quad \Delta\varphi = 4\pi G\rho. \tag{13.2.5}$$

Для справедливости записи смещений частиц в форме (13.2.1) необходимо, чтобы все уравнения были линейны. Первое уравнение линейно в смещениях и потенциале. Во втором уравнении, если мы используем истинное выражение для гравитационного потенциала φ как функции от эйлеровской координаты $\boldsymbol{r}$, появляется нелинейность [см. выражение ρ через $\boldsymbol{r}$ (13.2.4)]. Только в случае малых возмущений $\boldsymbol{r}$ можно записать

$$\varphi = \varphi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{6} G\bar{\rho}r^2 + \varphi', \tag{13.2.6}$$

где φ' — линейная функция $\boldsymbol{r} - a\boldsymbol{s}$, а $\frac{4\pi}{6} G\bar{\rho}r^2$ — невозмущенный потенциал в ньютоновском приближении. В случае немалых возмущений совокупность (13.2.1), (13.2.4) и (13.2.5) дает лишь приближенное решение. Решающим аргументом в пользу предложенной аппроксимации является то, что бесконечной плотности ρ в «блине» соответствует конечная плотность на единицу поверхности. Это следствие одномерного сжатия, в противоположность сферически-симметричному случаю. Но бесконечно тонкий диск с конечной массой и конечной поверхностной плотностью μ создает конечный потенциал (и конечное поле, т. е. градиент потенциала). Ошибка, вносимая сделанным нами предположением о факторизованном виде (13.2.1), несмотря на нелинейность (13.2.5), остается конечной даже в конце периода сжатия, когда $\rho \to \infty$.

С другой стороны, предлагаемая теория асимптотически точна вначале, когда возмущения малы, поскольку используемые формулы являются обобщением линейной теории. Численные расчеты при случайных начальных условиях показали, что ошибки в моменте образования «блинов» в среднем не превышают 20—30% [Дорошкевич, Рябенький, Шандарин (1973), Дорошкевич, Шандарин (1974)]. Но что представляется твердо установленным — это одномерный характер сжатия с пересечением траекторий и возникновением «блина» из вещества с большой плотностью. Образование «блина» сопровождается возникновением ударной волны в окружающем «блин» веществе. Этот процесс вместе с физическими приложениями теории обсуждается в следующей главе.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что изложенная картина справедлива лишь в случае равного нулю (или пренебрежимо малого) давления. Эквивалентной формулировкой является следующая: теория применима лишь к длинноволновым возмущениям ($\lambda > \lambda_{\text{дж}}$). Функция $\chi(\boldsymbol{s})$, которая играет главную роль в приближенной теории, определяется начальными значениями $\delta(\boldsymbol{s}, t)$ и

$u(s, t)$. Эти величины должны быть разделены (см. гл. 11) на нарастающую, убывающую и вихревую моды (последняя с $\operatorname{div} u=0$ и $\delta=0$). При $t \gg t_1$ лишь нарастающая мода выживает *) и решение описывается формулами (13.2.1), где, однако, χ описывает амплитуду растущей моды. В этом решении движение безвихревое как в r-пространстве, так и в s-пространстве, так что $\chi=\operatorname{grad}_s \varphi^*(s)$ и тензор деформации $\frac{\partial \chi_i}{\partial s_k}$ симметричен.

Можно показать, что при возмущениях, зависящих от одной только декартовой координаты, например s_1, решение является точным. Из условия отсутствия вихря следует, что решение в этом случае имеет вид

$$x=a(t)\,s_1+b(t)\,\chi_1(s_1), \qquad y=a(t)\,s_2, \qquad z=a(t)\,s_3.$$

При давлении, равном нулю, такое решение справедливо при любой функции $\chi_1(s_1)$ и при функциях $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющих уже известным нам уравнениям, полученным для малых возмущений в гл. 9, притом для любого $\Omega=1$ или $\Omega \neq 1$:

$$\ddot{a}=-\frac{H_0^2\Omega_0 a_0^3}{2a^2}, \qquad \ddot{b}=\frac{H_0^2 a_0^3\Omega_0 b}{a^3}.$$

Решение для a описывает фридмановское расширение, решение для b [зависящее от функции $a(t)$ первого уравнения] описывает линейную стадию возмущений любой формы, но в одномерном возмущении это решение остается точным и при больших возмущениях, пока столкновение частиц и появление ударных волн не приведут к тому, что нельзя будет пренебречь давлением. Эту стадию мы разберем в следующей главе.

Вернемся к общему случаю трехмерной задачи.

При малом отношении b/a можно записать первое приближение:

$$\rho=\bar{\rho}\left[1+\frac{b}{a}(\alpha+\beta+\gamma)\right], \quad \delta=\frac{b}{a}f(s), \quad f=\alpha+\beta+\gamma. \tag{13.2.7}$$

В этом приближении возмущение плотности растет, сохраняя свою форму, т. е. характер зависимости возмущения от лагранжевой координаты задан одной функцией $f(s)$. Однако при больших возмущениях это подобие нарушается. В точках (точнее, в частицах) с данной суммой $\alpha+\beta+\gamma$ плотность одинаково меняется на ранней (линейной) стадии, но по-разному (в зависимости от значений отдельных величин α, β, γ) на нелинейной стадии. Можно сказать, что предлагаемая приближенная теория учитывает не только приток вещества в область, где уже есть избыток массы, но учитывается и

*) Случай начальных вихревых возмущений будет рассмотрен позже, в гл. 14.

приливное воздействие соседних масс, действующих косвенно на характер сжатия.

Обратимся теперь к некоторым статистическим аспектам теории «блинов».

Довольно тонкий вопрос о вероятности появления данного набора коэффициентов α, β, γ исследован Дорошкевичем (1970). Отдельные компоненты тензора $D_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$ в фиксированной системе координат имеют нормальную функцию распределения, если функция распределения начальных возмущений нормальна и фурье-образы возмущений также распределены по нормальному закону. Но диагонализация тензора D_{ik}, т. е. расчет трех величин α, β, γ по шести величинам $\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$,— операция нелинейная. Следовательно, функция распределения α, β, γ больше не будет нормальной, даже если функция распределения $\frac{\partial x_i}{\partial s_k}$ нормальна.

Дорошкевич получил для вероятности данного набора α, β, γ

$$\left.\begin{aligned} &P(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{27\exp\left(-\frac{3}{5}s_1^2+\frac{3}{2}s_2\right)}{8\sqrt{5}\pi\sigma_0^6}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma),\\ &\sigma_0 s_1=\alpha+\beta+\gamma,\quad \sigma_0^2 s_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma, \end{aligned}\right\}\qquad(13.2.8)$$

где σ_0 — дисперсия диагональных компонент тензора D_{ik}*). Множители $(\alpha-\beta)$, $(\alpha-\gamma)$, $(\beta-\gamma)$ представляют особый интерес. Совпадение α и β (или α с β и γ), превращающее «блин» в «прут» (или даже в точку), является очень маловероятным, гораздо менее вероятным (из-за указанных выше множителей), чем совпадение двух или трех независимых величин. Картина «блинов» получает дальнейшее подтверждение.

Необходимо отметить, что сжатие по одной координате может сопровождаться как сжатием, так и расширением в плоскости «блина». На самом деле, как показал Дорошкевич, лишь около 8% вещества сжимается по всем трем осям ($\alpha>\beta>\gamma>0$); 84% вещества сжимается в одном направлении, но расширяются в одном или двух направлениях ($\alpha>\beta>0>\gamma$ или $\alpha>0>\beta>\gamma$). Величина 8% близка к оценке Оорта, по которой лишь около $1/16\approx6\%$ вещества сжимается по всем направлениям. Конечно, если вещество сжимается по трем направлениям, то оно образует гравитационно связанный объект. Однако не очевидно, что только эти 8% будут гравитационно связаны. Часть из других областей может также привести к образованию объектов.

*) Величина σ_0 выражается через фурье-компоненты растущих возмущений и пропорциональна $\left(\int\Delta(M,\ t)\,d\ln M\right)^{1/2}$, т. е. возмущению плотности, см. (13.2.7).