§ 3. Нелинейная спектральная теория

Случай пылевидного вещества относительно прост, и в линейной теории общее решение может быть написано непосредственно, без использования фурье-преобразований. Не удивительно, что в нелинейной теории приближенное решение может быть выписано через функции, зависящие от пространственных координат.

Теперь мы рассмотрим другой случай, в котором давление существенно. Это особенно важно для анализа процессов, происходящих до рекомбинации. Необходимо обсудить законы развития возмущений, распространяющихся подобно звуковым волнам или лежащих вблизи границы области неустойчивости. Здесь спектральный подход становится неизбежным. Начав с теории малых возмущений и построив линейную теорию, необходимо включить эффекты нелинейности, сначала как поправки к линейной теории.

Уравнения для фурье-амплитуд в линейном приближении могут быть приведены к виду [см., например, (9.2.6)]

$$a\frac{d^2A_k}{dt^2}+b\frac{dA_k}{dt}+cA_k=0, \tag{13.3.1}$$

где a, b, c — функции длины волны. Однородность уравнения (13.3.1) отражает тот факт, что в линейном приближении каждая фурье-амплитуда A_k изменяется независимо от других и $A_k=0$ тождественно является решением.

Нелинейные поправки превращают уравнение (13.3.1) в

$$a\frac{d^2A_k}{dt^2}+b\frac{dA_k}{dt}+cA_k=F(A_{k'},\ A_{k''}). \tag{13.3.2}$$

Из-за нелинейности основных уравнений возникает правая часть. Наиболее важным результатом учета нелинейности является генерация гармоник, отсутствующих в начальном спектре: условие $A_k=0$, $\frac{dA_k}{dt}=0$ в некоторый момент времени не гарантирует $A_k=0$ в последующие моменты времени, если функция F отлична от нуля.

Конечно, уравнение типа (13.3.2) является приближенным. Если уравнение (13.3.1) назвать первым приближением, то (13.3.2) может быть названо вторым приближением, но точное уравнение содержит функции третьего порядка $F(A_{k'}, A_{k''}, A_{k'''})$ и $F(A_k, A_{k'}, A_{k''})$ и всех более высоких порядков.

Точные уравнения в фурье-представлении являются настолько сложными интегро-дифференциальными уравнениями, что они бесполезны; точные уравнения в обычной пространственно-временной форме удобнее, так как это лишь дифференциальные уравнения в частных производных. Поэтому ограничимся при обсуждении вторым приближением (13.3.2).

Функция F описывает взаимодействие двух волн с волновыми векторами $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$, дающих третью волну с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, определяемым законом сохранения

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}''. \tag{13.3.3}$$

Следовательно, функция F может быть записана в виде

$$F=\int d^3k'd^3k''A_{k'}A_{k''}\,u(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}',\ \boldsymbol{u}'')\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''). \tag{13.3.4}$$

Вопросы нелинейного взаимодействия рассматривались во многих работах. Хорошая сводка содержится в упомянутой ранее монографии Монина и Яглома (1965, 1967). Основные физические следствия нелинейного взаимодействия следующие:

1. Если пренебречь вязкостью, то взаимодействие продольных волн между собой не приводит к возникновению поперечных волн. Этот результат вытекает из точной теоремы сохранения вихря, поперечные волны соответствуют вихревому движению без возмущений плотности:

$$\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{B}_ke^{ikx},\qquad \operatorname{rot}\,\boldsymbol{u}_k=i\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_k]\,e^{ikx}; \tag{13.3.5}$$

$[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_k]\neq0$, но $\operatorname{div}\,\boldsymbol{u}_k\sim(\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_k)=0$ для поперечных волн. Если $\operatorname{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ вначале, он остается равным нулю и далее, если нет вязкости и не возникают ударные волны. Следовательно, безвихревое движение создает в квадратичном (второй порядок) приближении безвихревые продольные волны.

2. Взаимодействие поперечных волн между собой создает продольные волны, и, следовательно, во втором порядке возникают возмущения плотности (это справедливо и для высших порядков). Этот эффект лежит в основе вихревой, или турбулентной, теории образования галактик, которая обсуждается более подробно в следующей главе.

Эффект возникновения продольных волн сильно зависит от уравнения состояния среды.

Поперечные волны не зависят от времени как в плазме с $P=\varepsilon/3$, так и в пыли с $P=0$ *). В среде с большой скоростью звука $b_{зв}$ продольные звуковые волны являются периодическими с периодом $T=\frac{2\pi}{b_{зв}k}$. Поперечные волны не приводят к резонансному (по времени) нарастанию продольных волн, амплитуда генерируемых возмущений плотности порядка $\delta\sim\frac{u^2}{b^2_{зв}}$.

Эффект в пыли сильно возрастает. Это использовали Озерной и Чернин (1967, 1968): они предположили существование вихревых

---

*) Точнее, они затухают из-за вязкости и расширения, но это несущественно для дальнейшего.

(турбулентных) движений до рекомбинации в плазме, в которой преобладает излучение. После рекомбинации, когда давление излучения перестает действовать на вещество, эта турбулентность приводит к возникновению больших возмущений плотности (см. об этом следующую главу).

3. Взаимодействие продольных возмущений с малой длиной волны (меньше некоторого λ_0) приводит к возникновению продольных волн возмущений плотности с большой длиной волны. Если начальный спектр достаточно круто падал в сторону длинных волн, то этот процесс будет определять флуктуации плотности в больших масштабах.

Точный результат зависит от рассматриваемой ситуации: рассматриваются ли возмущения с длиной волн больше джинсовской или акустические возмущения — бегущие или стоячие звуковые волны. При правдоподобных предположениях получается, что амплитуда длинных волн пропорциональна $A_k \sim k^2$, что приводит к закону

$$\frac{\Delta M}{M} \sim \sqrt{A_k^2 k^3} \sim k^{7/2} \sim M^{-7/6}. \qquad (13.3.6)$$

Простое объяснение этого результата дано в следующем параграфе, где рассматривается газ, молекулами которого являются звезды или скопления звезд. Очевидно, это крайний случай громадного числа коротковолновых возмущений.

4. Продольные волны с длиной волны большей, чем некоторое λ_0, из-за нелинейного взаимодействия будут генерировать короткие волны. Этот процесс также важен для космологии: согласно линейной теории (см. § 2 гл. 10), вязкость сильно подавляет возмущения в интервале длин волн, соответствующем $M < 10^{14}\ M_\odot$, а генерация поддерживает возмущения в этом интервале.

Пиблс (1970) исследовал процесс образования ударных волн в плазме, в которой преобладает излучение. Этот процесс вызван как раз генерацией коротких волн. Синусоидальная волна не имеет гармоник, но когда она трансформируется в пилообразную, то ее фурье-спектр содержит много обертонов. Разрыв в функции $\rho(x)$ (при некотором x_s), т. е. $\rho(x=x_s+0) \neq \rho(x=x_s-0)$, соответствует убыванию спектра пропорционально k^{-1} в одномерном случае. Возникновение ударной волны сопровождается также ростом энтропии. В этой ситуации флуктуации энтропии останутся даже после затухания продольных акустических волн.

В пылевидной среде, $P=0$, рассмотренное выше образование «блинов» (§ 2 этой главы) также сопровождалось появлением высоких гармоник в спектре возмущений плотности.

Теория нелинейного волнового взаимодействия в настоящее время далека от завершения. Есть лишь несколько важных для космологии законченных результатов. Поэтому наше обсуждение лучше рассматривать как введение к нерешенной проблеме, написанное для будущих теоретиков. Отметим некоторые свойства общей теории.

В статистической механике показано, что в равновесии на каждую степень свободы приходится одна и та же энергия, равная θ (эффективная температура в энергетических единицах, $\theta=kT$, где k — постоянная Больцмана; мы избегаем пользоваться такой записью, чтобы не путать постоянную Больцмана с $\boldsymbol{k}$—волновым вектором). Это значит, что $A_{\boldsymbol{k}}=\mathrm{const}\cdot\sqrt{\theta}$, где const не зависит от $\boldsymbol{k}$ и t, должно быть решением кинетического уравнения, если $\frac{\partial A_{\boldsymbol{k}}}{\partial t}=0$ в левой части этого уравнения (в среднем).

Законы равновесия не зависят от конкретных механизмов взаимодействия. В равновесии каждый процесс (например, рождение $\boldsymbol{k}$ из $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$) сопровождается обратным процессом (распадом $\boldsymbol{k}$ в $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$ в нашем примере), и когда все $A_{\boldsymbol{k}}$ имеют равновесные значения, то прямые взаимодействия в точности скомпенсированы обратными. Это очень общий и очень важный принцип, и его можно применить к системе уравнений, описывающей продольные и поперечные волны.

Равновесное решение строго реализуется лишь в тривиальном случае общего равновесия, если нет макроскопических движений и флуктуаций. В тех случаях, когда есть макроскопические движения, соответствующие значения θ чрезвычайно велики: например, движение воды со скоростью 1 *см/сек* в масштабе порядка 1 *см* соответствует $\theta\sim1$ *эрг*, т. е. $T\sim10^{16}$°K. Но, очевидно, невозможны ситуации, в которых все степени свободы в нашем примере находились бы при такой температуре: вода испарилась бы при температуре $\sim10^{3}$°K.

Теория турбулентности и теория флуктуаций всегда имеют дело с неравновесной ситуацией. Следовательно, равновесие может быть осуществлено только в малой части фазового объема (при $\boldsymbol{k}$ много меньших, чем обратное межатомное расстояние), и обычно мы сталкиваемся со стационарной, но неравновесной ситуацией.

Различие между этими двумя возможностями наиболее ясно видно из примера диффузии (n — концентрация частиц, j — поток, D — коэффициент диффузии):

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\frac{\partial j}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial n}{\partial x}.$$

В равновесии $n=\mathrm{const}$, $j=0$, но стационарное состояние достигается при $j=\mathrm{const}$, $n=n_0-\frac{xj}{D}$.

В задачах с турбулентностью или флуктуациями обычно есть поток энергии в сторону коротких волн, где энергия из-за диссипации превращается в тепло. В некоторых ситуациях, если $A_{\boldsymbol{k}}\to0$

при $k \to 0$, в части фазового пространства возможно и обратное направление потока энергии.

Необходимо иметь в виду еще следующее важное обстоятельство. Равновесие характеризуется только средним значением $\overline{A_k}$, и этого вполне достаточно, потому что фаза случайна и распределение A_k (т. е. вероятность найти некоторое значение A_k) нормально, т. е. гауссово.

В уравнениях нелинейного взаимодействия (13.3.2) заманчиво использовать те же предположения. Но они недопустимы! Вспомним о «блинах» — возникает распределение плотности с большой амплитудой коротких волн, но эти короткие волны не случайны, они коррелированы с длинными волнами и все вместе образуют плоский «блин». Без этой корреляции тот же спектр коротких волн дал бы весьма отличную картину распределения плотности. Следовательно, в проблемах, подобных проблеме возникновения «блинов», и в задачах образования ударных волн спектральный подход хуже (т. е. несравненно более сложен из-за учета корреляций), чем прямой анализ в пространственных координатах.

При обсуждении нелинейных задач спектральный подход не должен применяться далее, чем до второго порядка теории возмущений.

§ 4. Возникновение длинноволновых возмущений в газе из звезд или звездных скоплений

Рассмотрим важный вопрос о формировании сгущений большого масштаба из уже возникших отдельных объектов. Это — так называемая теория скучивания объектов.

Скучивание может происходить по двум причинам. Во-первых, потому, что в больших масштабах были первоначальные малые возмущения на ранней стадии расширения в начальном спектре. Эти возмущения растут в согласии с законами гравитационной неустойчивости и с течением времени дорастают до значительных и приводят к возникновению скоплений объектов. Во-вторых, скучивание может происходить из-за нелинейных эффектов, порождающих длинные волны возмущений из коротких.

Ниже мы проанализируем, при каких условиях осуществляется каждая из указанных причин скучивания. Дальнейшее изложение в этом параграфе основано на работе Дорошкевича, Зельдовича (1974).

Предположим, что спектр возмущений — весь или часть его — соответствует амплитуде, падающей с ростом масштаба, но не слишком быстро (ниже мы уточним, что означает «не слишком быстро»). В таком случае сперва образуются мелкие единицы — отдельные тела, но они распределены в пространстве неравномерно из-за наличия (хотя и более слабых) возмущений большего масштаба.