при $k \to 0$, в части фазового пространства возможно и обратное направление потока энергии.

Необходимо иметь в виду еще следующее важное обстоятельство. Равновесие характеризуется только средним значением $\overline{A_k}$, и этого вполне достаточно, потому что фаза случайна и распределение A_k (т. е. вероятность найти некоторое значение A_k) нормально, т. е. гауссово.

В уравнениях нелинейного взаимодействия (13.3.2) заманчиво использовать те же предположения. Но они недопустимы! Вспомним о «блинах» — возникает распределение плотности с большой амплитудой коротких волн, но эти короткие волны не случайны, они коррелированы с длинными волнами и все вместе образуют плоский «блин». Без этой корреляции тот же спектр коротких волн дал бы весьма отличную картину распределения плотности. Следовательно, в проблемах, подобных проблеме возникновения «блинов», и в задачах образования ударных волн спектральный подход хуже (т. е. несравненно более сложен из-за учета корреляций), чем прямой анализ в пространственных координатах.

При обсуждении нелинейных задач спектральный подход не должен применяться далее, чем до второго порядка теории возмущений.

§ 4. Возникновение длинноволновых возмущений в газе из звезд или звездных скоплений

Рассмотрим важный вопрос о формировании сгущений большого масштаба из уже возникших отдельных объектов. Это — так называемая теория скучивания объектов.

Скучивание может происходить по двум причинам. Во-первых, потому, что в больших масштабах были первоначальные малые возмущения на ранней стадии расширения в начальном спектре. Эти возмущения растут в согласии с законами гравитационной неустойчивости и с течением времени дорастают до значительных и приводят к возникновению скоплений объектов. Во-вторых, скучивание может происходить из-за нелинейных эффектов, порождающих длинные волны возмущений из коротких.

Ниже мы проанализируем, при каких условиях осуществляется каждая из указанных причин скучивания. Дальнейшее изложение в этом параграфе основано на работе Дорошкевича, Зельдовича (1974).

Предположим, что спектр возмущений — весь или часть его — соответствует амплитуде, падающей с ростом масштаба, но не слишком быстро (ниже мы уточним, что означает «не слишком быстро»). В таком случае сперва образуются мелкие единицы — отдельные тела, но они распределены в пространстве неравномерно из-за наличия (хотя и более слабых) возмущений большего масштаба.

Образование больших единиц в этой картине определяется начальным спектром, начальной амплитудой соответствующих возмущений. При этом предварительное, более раннее образование малых единиц в первом приближении несущественно. В большом масштабе (например, $10^{16} M_\odot$) закон нарастания возмущений одинаков для газа, состоящего из отдельных атомов H I с $m \approx 10^{-24}$ $г \approx$ $\approx 10^{-57}$ $M_\odot$, и для газа, «молекулами» которого являются шаровые скопления с массой $M \approx 10^5 M_\odot$.

Пусть в момент рекомбинации $t_{рек}$, $z_{рек}$ заданы возмущения плотности, зависящие от масштаба, характеризуемого массой M, по закону

$$\left.\begin{aligned} \delta_{рек} &= \frac{\delta\rho}{\rho} = b_0 M^{-\nu} \quad \text{при} \quad M \geqslant M_1; \\ \delta_{рек} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{при} \quad M < M_1. \end{aligned}\right\} \tag{13.4.1}$$

Закон роста возмущений (для случая критической плотности) таков:

$$\delta = \delta_{рек} \frac{1+z_{рек}}{1+z} = \delta_{рек} \left(\frac{t}{t_{рек}}\right)^{2/3}. \tag{13.4.2}$$

Примем в качестве приблизительного условия обособления отдельных тел $\delta(M, z) = \delta(M, t) = 1$. Тогда первые обособившиеся тела с массой M_1 появятся в момент t_1, z_1, который получим из условия

$$\delta = b_0 M_1^{-\nu} \left(\frac{t_1}{t_{рек}}\right)^{2/3} = b_0 M_1^{-\nu} \frac{z_{рек}}{1+z_1} = 1, \tag{13.4.3}$$

так что

$$t_1 = t_{рек} b_0^{-3/2} M_1^{3/2\nu}, \qquad z_1 + 1 = z_{рек} b_0^{-1} M_1^{-\nu}. \tag{13.4.4}$$

В дальнейшем происходит рост характерной массы, т. е. процесс объединения масс M_1 в агрегаты с массой M по закону

$$M(t) = M(z) = M_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{2/3\nu} = M_1 \left(\frac{1+z_1}{1+z}\right)^{1/\nu}. \tag{13.4.5}$$

В частности, при простейшем законе $\delta \sim M^{-1/2}$, $\nu = 1/2$ получим [см. Пресс и Шехтер (1974)]

$$M \sim t^{4/3} \sim (1+z)^{-2}, \tag{13.4.6}$$

так что число первичных тел с массой M_1, объединившихся к данному моменту ($N = M/M_1$), растет пропорционально a^2 — квадрату радиуса Вселенной.

Однако закон (13.4.5) независимого роста возмущений разных масштабов возможен, как мы сейчас покажем, лишь при не слишком крутом спектре, $\nu < 7/6$ в случае степенного спектра.

Дело в том, что необходимо учесть нелинейные эффекты. Рассмотрим крайний случай, когда в первичном спектре длинноволновые возмущения вовсе отсутствуют ($\delta=0$ при $M>M_2$). Коротковолновые возмущения в процессе роста за счет нелинейности рождают также и длинноволновые возмущения с амплитудой фурье-компонент $A_k \sim k^2$, где k — волновой вектор. Обоснование этого закона $A_k \sim k^2$ будет дано ниже в этом параграфе. Здесь остановимся на физических выводах [Зельдович (1965г), Пиблс (1974б)]. В пересчете на среднее возмущение плотности, соответствующее данной массе $M \gg M_1$, получим

$$\delta(M) = (A_k^2 k^3)^{1/2}\big|_{k=M^{-1/3}} \sim M^{-7/6}. \qquad (13.4.7)$$

Из размерности следует, что в момент t_1, когда $\delta(M_1, t_1)=1$, для больших масс

$$\delta(M, t_1) = \left(\frac{M}{M_1}\right)^{-7/6}. \qquad (13.4.8)$$

Таким образом, если начальный спектр достаточно крут, то нелинейные эффекты приводят к степенному спектру (13.4.8) с показателем $\nu=7/6$, которому соответствует закон роста массы

$$M = M_1\left(\frac{1+z}{1+z_1}\right)^{-6/7} = M_1\left(\frac{t}{t_1}\right)^{4/7}. \qquad (13.4.9)$$

Именно этот закон можно назвать «автомодельным» законом скучивания. Этот закон устанавливается во всех случаях, когда начальный спектр является достаточно крутым, т. е. когда в начальном спектре нет длинноволновых возмущений (точнее, эти возмущения меньше определенного предела) и возникновение больших масс причинно связано (через нелинейность) с ранее происшедшим обособлением малых масс.

Напротив, закон (13.4.6) $M \sim (1+z)^{-2} \sim a^2 \sim t^{4/3}$ не следует называть автомодельным: степенная зависимость здесь отражает задание начального спектра в степенном виде, а не физическую сущность процесса.

Предположим, что начальные возмущения являются энтропийными. Тогда естественно предположить, что $\delta(M)$ имеет максимум при $M_1 \approx 10^5 - 10^6\ M_\odot$ на момент $z \approx 200$. В меньшем масштабе возмущения не растут: этому препятствует газовое давление нейтрального водорода. Предположим, что массы $M_1 \approx 10^6\ M_\odot$ выделяются наиболее рано, при $z \approx 1000$, спектр крутой, и дальнейшая эволюция заключается в их гравитационном скучивании. При этом к сегодняшнему моменту $z=0$ получим $M \approx 10^6 \cdot (10^3)^{6/7} M_\odot \approx 5 \cdot 10^8 M_\odot$. Следовательно, такая концепция неудовлетворительна, она не объясняет существования объектов с гораздо большей массой.

Пресс и Шехтер (1974), принимая закон $M \sim (1+z)^{-2}$, получают $M_{max} \approx 10^{12} M_\odot$, что близко к массам гигантских галактик или малых скоплений галактик. Выше было объяснено, что в действительности в этом случае образование больших объектов является следствием задания длинноволновых возмущений в начальных условиях, и нельзя в этом случае говорить об *объяснении* процесса образования тел с $M \approx 10^{12}\ M_{\odot}$.

В ранней работе Дорошкевича, Зельдовича и Новикова (1967а) предполагалось, что физические возмущения, связанные со взрывами протозвезд $M \approx 10^5 - 10^6\ M_{\odot}$, приводят к более быстрому нарастанию масштабов. В настоящее время нам представляется более вероятным наличие начальных возмущений в масштабе до $10^{14} - 10^{15}\ M_{\odot}$, достаточных для того, чтобы $\delta \approx 1$ достигалось при $z \approx 4-10$ [см. Сюняев, Зельдович (1972б), Дорошкевич, Шандарин (1974)].

Такие возмущения могут быть адиабатическими, а не энтропийными, тогда масштаб $M \approx 10^{14} M_{\odot}$ обусловливается затуханием акустических волн меньших масштабов на предыдущей, догалактической стадии эволюции. Все эти вопросы будут рассмотрены в следующей главе.

Перейдем теперь к выводу приведенного выше автомодельного спектра длинноволновых возмущений (13.4.7).

Предположим, что пространство разбито на малые ячейки, в каждой из которых находится одна или несколько частиц, причем выполнены два условия: 1) масса в каждой ячейке постоянна; 2) суммарный импульс частиц в ячейке равен нулю, и центр тяжести всех частиц в данной ячейке совпадает с центром ячейки. Покажем, что в этом случае возникают возмущения, характеризуемые спектром $A(k) \sim k^2$ при $k \to 0$. Аналогичный вывод может быть сделан и в рамках гидродинамики [см. об этом Дорошкевич, Зельдович (1974)].

Пренебрежем космологическим расширением и гравитационным взаимодействием. В этом случае каждая частица движется по прямой с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_i$. Можно записать текущую координату отдельной частицы в виде

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_i + \Delta\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{v}_i t,$$

где $\boldsymbol{R}_i$ — координата центра ячейки, $\Delta\boldsymbol{r}_i$ — начальное смещение частицы из центра ячейки. Разлагая плотность в ряд по степеням $\boldsymbol{k}$, получим (V — объем системы)

$$\rho = V^{-1}\sum_j m_j e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_j} \approx V^{-1}\sum_j m_j e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_j}\Big[1 + i\boldsymbol{k}(\Delta\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{v}_j t) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{r}_j)^2 - \\ - \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_j)^2 t^2 - (\boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{r}_j)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_j)\,t + \ldots\Big]. \quad (13.4.10)$$

Первый член ряда описывает среднюю плотность и не содержит случайных множителей ($\Delta\boldsymbol{r}_j$ и $\boldsymbol{v}_j$). Второй и третий члены ряда дают нуль при суммировании в пределах каждой отдельной ячейки, поскольку, согласно предположению 2), центр тяжести ячейки совпадает с ее центром и суммарный импульс частиц в ячейке равен нулю. Лишь квадратичные по $\boldsymbol{k}$ члены дают отличный от нуля вклад в случайную амплитуду возмущений. Это приводит к амплитуде возмущений плотности

$$A(k) \sim k^2. \tag{13.4.11}$$

Это очень общий результат. Произвольное локальное взаимодействие, рассматриваемое как источник возмущений, удовлетворяет законам сохранения массы и импульса. Следовательно, возникающие возмущения плотности характеризуются амплитудой $A(k) \sim k^2$. Это, например, проявляется при расчете флуктуаций в гидродинамике, возникающих под влиянием диссипативных процессов [Ландау и Лифшиц (1957)]. В случае стационарных флуктуаций (квантовых или равновесных) рассмотренное выше разложение не применимо ни для каких k и вывод $A(k) \sim k^2$ не справедлив. Поэтому в стационарном распределении возможны спектры $\overline{A^2(k)} \sim k^0$ — равновесное распределение, квантовые флуктуации бозе-газа, $\overline{A^2(k)} \sim k$ — квантовые флуктуации ферми-газа и др.

В упомянутой работе Пресса и Шехтера (1974) в отдельной ячейке была лишь одна частица, причем расположенная случайным образом. В этом случае центр тяжести ячейки не совпадает с центром ячейки и возмущения характеризуются амплитудой $A(k) \sim k$ в пределе $k \to 0$. Вернемся к предположению (13.4.11).

Учет расширения и гравитационной неустойчивости приводит к выводу (для простоты предположим критическую среднюю плотность):

$$\overline{A^2(k,\ t)} \approx k^4 \left(\frac{v^2}{G\bar{\rho}_0}\right)^2 \frac{m}{\bar{\rho}_0} a^2 \tag{13.4.12}$$

в пределе при $k \to 0$ ($a \sim t^{2/3}$ — масштабный множитель, описывающий общее хаббловское расширение), или, подставляя по порядку величины $v^2 \approx G m^{2/3} \rho^{1/3}$, получим

$$\overline{A^2(k,\ t)}\Big|_{k\to 0} \approx k^4 \left(\frac{m}{\bar{\rho}_0}\right)^{7/3} a^2. \tag{13.4.13}$$

Если определять дисперсию массы в объеме, охватывающем массу M, условием

$$\Sigma^2(M) = \overline{A^2(k,\ t)}\, k^3\Big|_{k^3 = M/\bar{\rho}}, \tag{13.4.14}$$

то для спектра (13.4.13) получим

$$\Sigma^2(M) \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{7/3} a^2, \tag{13.4.15}$$

что и решает, в принципе, вопрос о возможности гравитационного скучивания объектов.

Для того чтобы связать конечное распределение объектов по массам и начальный спектр флуктуаций плотности, используется какое-либо условие обособления, объектов, условие слипания частиц и выделения группы их на общем среднем фоне. В работах Дорошкевича (1967) и Пресса и Шехтера (1974) предполагается, что каждый выделяющийся объект строго сферически-симметричен, и в качестве условия обособления используется требование достижения определенного избытка массы $\Delta M/M$ в шаре с данной массой M. При этом границы шара фиксируются резко и, как это отмечено и обсуждается Зельдовичем, Новиковым (1967б), см. также гл. 12, дисперсия массы в объеме с массой M определяется формулой (13.4.14) при $k \to 0$ лишь в том случае, если $\overline{A^2(k, t)} \sim k^n$ и $n \leqslant 1$. Если же $n > 1$, то резкое задание границы приводит к тому, что вместо (13.4.14) мы получим $\Sigma^2(M) \sim k^4 \sim V^{-4/3}$ при любом $n \geqslant 1$. В этом случае $\Sigma^2(M)$ определяется флуктуацией числа частиц на границе рассматриваемого объема. В реальной задаче, особенно при отказе от точной сферической симметрии, резкой границы не возникает и можно полагать, что формула (13.4.14) лучше соответствует действительности. Принятое в работе Пресса и Шехтера (1974) условие обособления, в принципе, не позволяет выделить спектр с показателем $n > 1$.

Результаты численных расчетов Пресса и Шехтера для случая начальных возмущений с показателем спектра $n=0$ полностью совпадают с теорией малых возмущений и не содержат каких-либо элементов автомодельности. Действительно, при $n=0$ для связи относительного превышения массы в объеме с массой M с размерами объема и временем получим

$$\overline{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2} \sim M^{-1}a^2, \qquad (13.4.16)$$

где a — масштабный множитель. Условие обособления

$$\overline{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2} = \text{const}, \qquad (13.4.17)$$

откуда получаем зависимость массы «объекта» от времени:

$$M \sim a^2. \qquad (13.4.18)$$

Для показателя спектра (фактического) $n=1$ аналогичными рассуждениями получаем

$$M \sim a^{3/2}, \qquad (13.4.19)$$

что совпадает с результатами численного эксперимента на начальной стадии. В общем случае для произвольного показателя степени

n $[A^2(k) \sim k^n]$ получаем

$$M \sim a^{\frac{6}{3+n}} \tag{13.4.20}$$

и для флуктуаций, соответствующих (13.4.13),

$$n = 4, \qquad M \sim a^{6/7}. \tag{13.4.21}$$

Аналогичные результаты могут быть получены и для функции распределения объектов по массам. Формула, обобщающая распределение по массам Пресса и Шехтера, была получена Дорошкевичем (1967). Там же была выявлена область применимости этой формулы. Если отказаться от использования резкой сферической границы выделяющегося объема и использовать для дисперсии массы в данном объеме формулу (13.4.14), то для функции распределения объектов по массам получим

$$dW \sim M^{\frac{n-3}{6}} \exp\left(-\frac{\Sigma^2}{2}\right) dM. \tag{13.4.22}$$

Для $n=0$ и $n=1$ это полностью согласуется с результатами Пресса и Шехтера. Отклонение в численных экспериментах Пресса и Шехтера от теории при $n=1$, по-видимому, связано с использованием недостаточно большого количества частиц (только 10^3 точек). Это приводит к заметному влиянию границы, т. е. частиц, расположенных в поверхностном слое, и появлению примеси возмущений со спектром $\overline{A^2(k)} \sim k^0$. Не случайно эти возмущения проявляются лишь на поздней стадии расчета и точность этого варианта много хуже точности варианта с $n=0$.

§ 5. Тепловая неустойчивость и разделение однородного газа на фазы

При наличии источников энергии и неравновесных процессов существует механизм, вызывающий неустойчивость однородного газа и приводящий к разделению однородного газа на плотные холодные облака и горячий газ малой плотности между облаками. Этот механизм, называемый тепловой неустойчивостью, не связан с действием силы тяготения. Как следствие, его эффективность (инкремент нарастания возмущений) убывает для длинных волн. Для тепловой неустойчивости характерно существование оптимального размера. Подчеркнем сразу, что первичное разделение космологической плазмы на отдельные тела не связано с тепловой неустойчивостью, так как для ее проявления необходимы источники энергии. Зато в условиях галактик с большим содержанием газа значение тепловой неустойчивости весьма велико.