

4) После рекомбинации происходит перестройка движения; возникающие растущие возмущения характеризуются амплитудой

$$\sqrt{\Delta(M)} = M^{-n} e^{-(M c/M)^{1/2}}, \quad n = \nu + \frac{1}{3}^* \quad (14.2.4)$$

5) После рекомбинации можно пренебречь давлением нейтрального газа при рассмотрении эволюции возмущений. Основанием является тот факт, что $M_c \gg M_{\text{дж}}$ — джинсовской массы нейтрального газа (см. ниже § 3). Благодаря этому применима приближенная теория роста возмущений в пылевидной среде, изложенная в § 2 гл. 13.

Обратимся к картине движения, вытекающей из пунктов 1)–5).

В приближенной теории было выяснено, что с течением времени возникают области бесконечной плотности. После возникновения такой области ближайшие частицы газа наталкиваются на плотный газ и останавливаются. Ниже мы рассмотрим подробнее движение газа, его нагревание ударной волной и дальнейшую судьбу сжатого газа.

§ 3. Ударная волна

Обратимся к приближенному решению, описывающему образование «блинов» в ходе роста неоднородностей плотности (§ 2 гл. 13). Величина α [см. формулу (13.2.4)] определяет момент, когда плотность формально достигнет бесконечности, по условию

$$\alpha(s) \frac{b}{a} = 1. \quad (14.3.1)$$

Рассмотрим частицу, в которой α максимально, $\alpha = \alpha_{\text{max}}$. Обозначим ее лагранжеву координату s_m . Достаточно локального максимума, т. е. того, что $\alpha(s_m)$ больше, чем в соседних точках, хотя где-то вдали могут существовать и другие максимумы, часть которых выше α_{max} .

Вблизи s_m можно разложить α как функцию s в ряд:

$$\alpha = \alpha_{\text{max}} + A_{ik}(s_i - s_{mi})(s_k - s_{mk}) + \dots \quad (14.3.2)$$

*) Отвлекаемся от модуляции амплитуды возмущений (см. гл. 10, § 6), т. е. рассматриваем амплитуду, усредненную по не слишком малому интервалу ΔM . Формула справедлива для $M > M_2 \approx 10^{17} M_{\odot}$, т. е. для флуктуаций, которые проходят стадию акустических колебаний до рекомбинации. Отличие n от ν связано с тем, что $\delta\rho$ в растущей моде после рекомбинации пропорционально u/l , где u — скорость вещества в акустической волне до рекомбинации и $l \sim M^{1/2}$. Наконец, напомним, что A_k есть фурье-амплитуда возмущения плотности в акустическом режиме до затухания (в частности, на нижней границе области устойчивости, рис. 43). Эта амплитуда и численно (по порядку величины) и по зависимости от волнового вектора совпадает с амплитудой скалярного возмущения метрики, не зависящей от времени на всем протяжении от сингулярности до области устойчивости. Вероятным представляется $\nu=0$, $n=1/3$, $r=-3/2$ (см. ниже); однако не исключены и другие значения ν , n , r .

Члены первого порядка ($s - s_m$) отсутствуют потому, что в частице s_m величина α максимальна. По той же причине следующий квадратичный член везде отрицателен. Поверхности с постоянным α представляют собой эллипсоиды с частицей s_m в центре. Из соображений размерности следует, что $|A_{ik}| \sim \frac{\alpha_m}{R_c^2}$, где R_c — характерный размер — длина волны возмущений, избегающих затухания в период до рекомбинации.

В определенный момент t_c , подчиняющийся условию $\frac{\alpha_m b(t_c)}{a(t_c)} = 1$, впервые в частице s_m возникает бесконечная плотность. Затем сжимается вещество со все меньшим и меньшим значением α . Нетрудно убедиться, что все три оси эллипсоида, в котором достигнуто условие $\alpha(s) \frac{b(t_c)}{a(t_c)} = 1$, по порядку величины равны

$$r \sim R_c \sqrt{\frac{t-t_c}{t_c}}; \quad (14.3.3)$$

масса вещества в эллипсоиде растет пропорционально $(t - t_c)^{3/2}$.

Но эллипсоид имеет три (по порядку величины) одинаковых оси только в s -пространстве (в лагранжевых координатах). В действительности в эйлеровых координатах (в r -пространстве) эллипсоид сжат в том направлении, в котором деформация происходит всего быстрее. Это направление, вдоль которого скорость деформации дана величиной α_m (причем $\alpha > \beta > \gamma$, см. гл. 13, § 2).

Направление α_m может и не совпадать ни с одной осью эллипсоида.

Переход от лагранжевых координат к эйлеровым сопровождается сжатием эллипсоида. При сжатии эллипсоида по любому направлению получается (в том приближении, в котором $\rho = \infty$) плоская фигура — эллипс, которую мы называем «блином».

На каждом элементе поверхности «блина» сжатие происходит независимо от того, как развиваются события на соседних элементах, потому что все градиенты в направлении нормали гораздо больше градиентов в плоскости «блина». Поэтому целый ряд локальных характеристик — законы изменения давления, плотности, температуры — можно рассматривать в одномерном приближении; см. Зельдович (1970б), Сюняев, Зельдович (1972б).

Рассмотрим одномерную картину сжатия вещества в «блин». Общее решение одномерной задачи выписано в § 2 гл. 13. Здесь мы только предположим, что возмущение задается в виде одной синусоидальной волны и $\Omega = 1$. Решение тогда перепишем в виде

$$r = a_0 t^{2/3} s - \frac{\kappa}{\kappa} b_0 t^{4/3} \sin(\kappa s), \quad (14.3.4)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 t^{2/3} s_x - b_0 t^{4/3} \sin(\kappa s_x), \\ y &= a_0 t^{2/3} s_y, \quad z = a_0 t^{2/3} s_z. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.5)$$

Для плотности получаем выражение

$$\rho = \bar{\rho} \left[1 - \frac{\kappa b_0}{a_0} t^{2/3} \cos(\kappa s_x) \right]^{-1}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (14.3.6)$$

Итак, впервые плотность обращается в бесконечность в плоскости *) $s_x=0$, $x=0$ в момент $t_c = \left(\frac{a_0}{\kappa b_0}\right)^{3/2}$. Соответствующее значение красного смещения z назовем z_c (далее везде в этом параграфе z — красное смещение, не путать с координатой z !). Для упрощения везде вместо $z+1$ будем писать просто z (при $z \sim 3-5$ читатель сам легко внесет поправку). С учетом этого $\frac{z}{z_c} = \left(\frac{t}{t_c}\right)^{3/2}$.

При $t > t_c$ возникают две ударные волны, распространяющиеся симметрично от начала. Сперва рассмотрим случай мгновенного охлаждения сжатого газа. В этой ситуации плотность его бесконечна, поверхность ударной волны не отходит от плоскости $x=0$.

Найдем закон, по которому растет количество сжатого вещества и давление ударной волны. Ударная волна и сжатое вещество расположены при $x=0$, откуда

$$\frac{\sin \kappa s_x}{\kappa s_x} = \left(\frac{t_c}{t}\right)^{3/2} = \frac{z}{z_c}. \quad (14.3.7)$$

Это уравнение имеет нетривиальное ($s_x \neq 0$) решение при $t > t_c$, $z < z_c$. Удобно ввести величину $\mu = \frac{\kappa s_x}{\pi}$. Эта величина, являющаяся разновидностью лагранжевой координаты, есть отношение массы, заключенной между началом $s_x=0$ и данным s_x , к полной массе в половине ячейки периодичности. Получим

$$\frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} = \frac{z}{z_c}. \quad (14.3.8)$$

При $\mu \ll 1$ отсюда **)

$$1 - \frac{1}{6} (\pi \mu)^2 = \frac{z}{z_c}, \quad \mu = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{z}{z_c}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{t}{t_c} - 1}. \quad (14.3.9)$$

*) В дальнейшем все изложение ведется для одной ячейки периодичности $-\frac{\pi}{\kappa} < s_x < \frac{\pi}{\kappa}$, также $(2n-1)\frac{\pi}{\kappa} \leq s_x \leq (2n+1)\frac{\pi}{\kappa}$.

***) Закон зависимости массы сжатого газа от времени $\mu \sim \sqrt{t-t_c}$ отличается от найденного ранее общего закона $m \sim (t-t_c)^{3/2}$ вследствие того, что здесь рассматривается вырожденный случай одновременного образования ударной волны по всей плоскости $x=0$. В общем случае количество вещества в каждой точке поверхности «блина» пропорционально $\sqrt{t-t_c}$, но в различных точках различно значение t_c .

Далее, $\mu = \frac{1}{2}$ при $z = \frac{2}{\pi} z_c$. В сделанных предположениях за бесконечное время $t \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$ все вещество проходит через волну ($\mu \rightarrow 1$), но лишь асимптотически.

Нужно особенно отметить, что ударному сжатию подвергается вещество, которое еще не успело достичь бесконечной плотности за счет сближения соседних слоев, и даже то вещество, которое расширяется до попадания в ударную волну. Приводим таблицу, характеризующую динамику сжатия в сделанном приближении.

ТАБЛИЦА XI

Доля вещества, прошедшая через ударную волну

t/t_c	1	1,025	1,33	1,96	6,1	28	∞
z/z_c	1	0,983	0,83	0,64	0,30	0,1	0
μ	0	0,1	0,333	0,5	0,76	0,9	1

Найдем скорость, с которой вещество сталкивается с ударной волной, плотность вещества перед ударом и возникающее давление. Несложный расчет дает

$$\left. \begin{aligned} |u| &= \frac{\lambda_c}{t_c} \frac{1}{3\pi} \sqrt{\pi\mu \sin \pi\mu}, \\ \rho &= \rho_c^* \frac{\sin^3 \pi\mu \operatorname{tg} \pi\mu}{(\pi\mu)^3 (\operatorname{tg} \pi\mu - \pi\mu)}, \\ P &= \rho u^2 = \rho_c^* \left(\frac{\lambda_c}{t_c}\right)^2 \frac{\sin^4 \pi\mu \operatorname{tg} \pi\mu}{9\pi^2 (\operatorname{tg} \pi\mu - \pi\mu) (\pi\mu)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.10)$$

Здесь введено обозначение $\lambda_c = 2\pi a_0 t_c^{2/3} / \kappa$, т. е. λ_c — это длина волны возмущения в характерный момент t_c ; $\rho_c^* = (6\pi G t_c^2)^{-1}$ — средняя плотность в этот момент.

Характерной особенностью приведенных выше формул является поведение описываемых ими величин при малых μ (при малых $t - t_c$, малых $z_c - z$) вскоре после образования ударной волны:

$$\left. \begin{aligned} u &\sim \mu \sim \sqrt{t - t_c} \sim \sqrt{z_c - z}, \\ \rho &\sim \mu^{-2} \sim (t - t_c)^{-1} \sim (z_c - z)^{-1}, \\ P &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (14.3.11)$$

Это не значит, что давление строго постоянно, его производная вовсе не равна нулю. Важно, что нет степенной зависимости давления от μ , давление не равно нулю и не равно бесконечности в начальной стадии. С течением времени давление уменьшается и

$$P\left(\mu = \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3\pi^2} P(\mu = 0) = 0,134 P(\mu = 0). \quad (14.3.12)$$

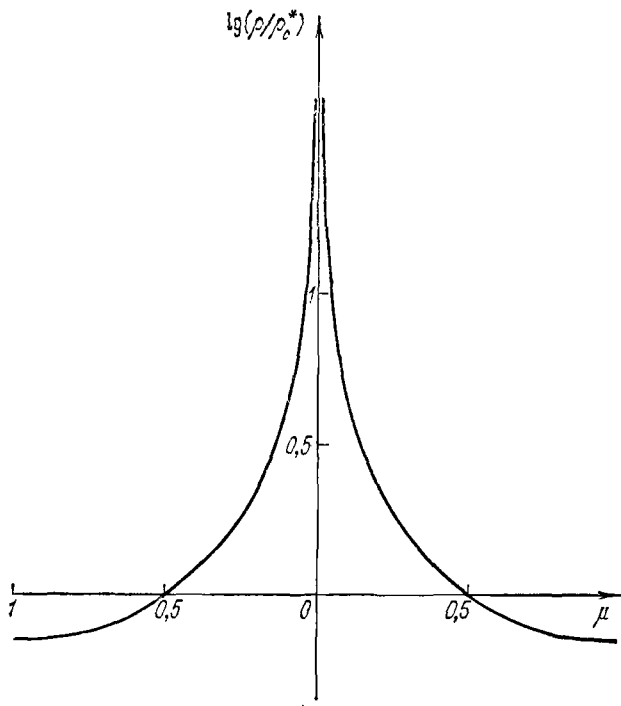


Рис. 46. Распределение плотности в момент $t=t_c$. По оси абсцисс отложено μ , по оси ординат $\lg(\rho/\rho_c^*)$. В точке $\mu=0$ плотность бесконечна [см. формулу (14.3.6)].

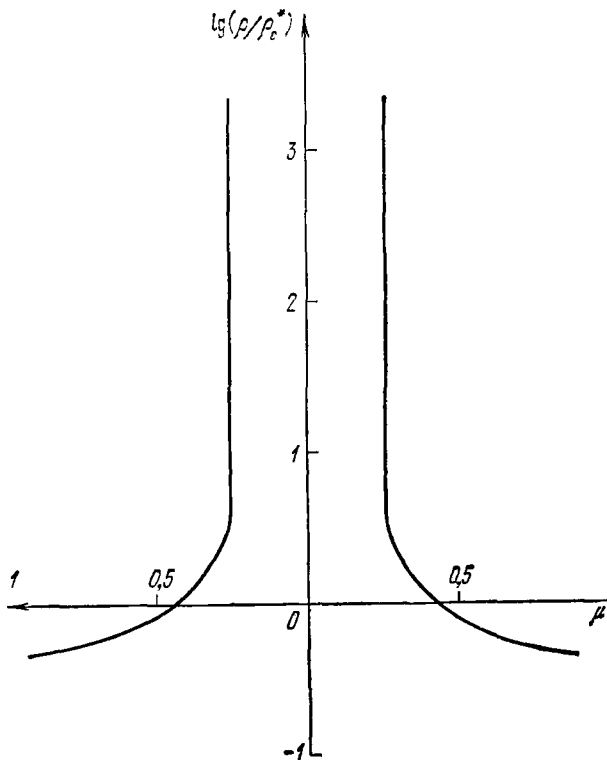


Рис. 47. Распределение плотности в предположении быстрого охлаждения в момент, когда ударная волна достигла координаты $\mu=0,25$. В эйлеровых координатах область $\rho = \infty$ стягивается в точку.

Теперь рассмотрим противоположный предельный случай другого теплового режима — полное отсутствие теплоотдачи.

Картина движения после появления волны уже не может быть построена элементарно, без численного расчета, даже в сделанных выше упрощающих предположениях. Просто можно найти лишь асимптотику начала сжатия, $\mu \ll 1$. По-прежнему давление имеет определенное предельное значение, которое, однако, меньше, чем в первом случае в $\frac{11}{12} = 0,92$ раза; в $\sqrt{\frac{11}{9}} = 1,1$ раза больше количество вещества, сжатого ударной волной, на тот же момент времени, так как волна теперь отделяется от плоскости $x=0$ и идет навстречу падающему веществу.

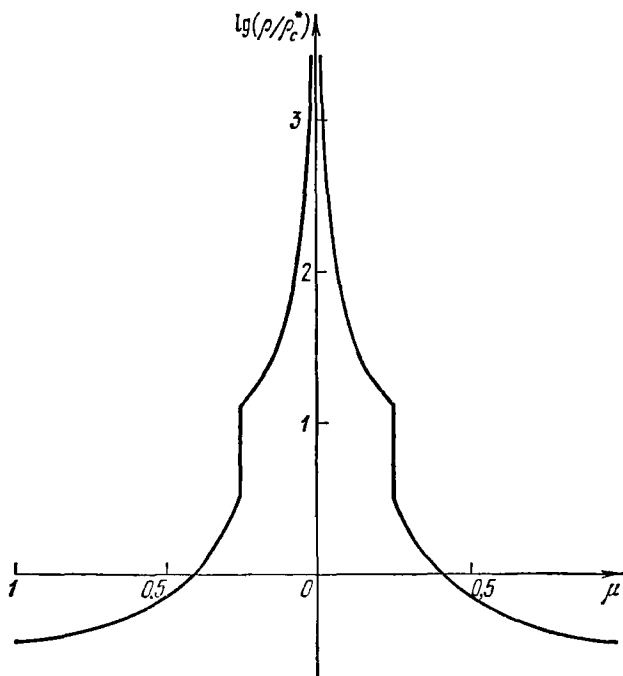


Рис. 48. Распределение плотности в адиабатическом варианте в момент достижения ударной волной координаты $\mu=0,25$. Без охлаждения, в адиабатическом случае, плотность после сжатия не обращается в бесконечность.

Средняя плотность сжатого вещества в 12 раз больше плотности вещества перед фронтом волны. На рис. 46 показано распределение плотности в момент t_c , т. е. как раз в момент достижения $\rho=\infty$ в плоскости $x=0$. На рис. 47 и 48 показано распределение плотности в момент $t = \frac{7}{6} t_c$, когда сконденсировалась приблизительно

четверть вещества. При этом рис. 47 относится к случаю быстрого охлаждения, а рис. 48 — к адиабатическому случаю.

Уже упоминалась характерная особенность адиабатического случая, а именно отрыв волны от плоскости симметрии. Вначале (при $\mu \ll 1$) путь, пройденный волной, мал, притом мал не только по сравнению с размером ячейки периодичности, но и по сравнению с расстоянием, составляющим долю μ от половины ячейки.

В самом деле, средняя плотность за фронтом (т. е. плотность сжатого вещества) равна $\rho_{сж} = \bar{\rho} \frac{33}{(\pi\mu)^2}$. Значит, толщина слоя, отнесенная к размеру ячейки периодичности (к расстоянию между соседними сжатыми слоями), равна

$$\alpha^* = \frac{2x}{\lambda_c} = \frac{\mu\bar{\rho}}{\rho_{сж}} = \frac{\mu^3\pi^2}{33}. \quad (14.3.13)$$

Из этих формул получим, что, когда доля вещества, сжатого ударной волной, равна 10% ($\mu=0,1$), это вещество занимает долю объема $\alpha^*=3 \cdot 10^{-4}$; это значит, что его плотность в 300 раз больше средней. Для 30% ($\mu=0,31$) получим соответственно $\alpha^*=10^{-2}$, $\rho_{сж}/\bar{\rho}=30$.

Подчеркнем, что расчет проделан в предположении строгой адиабатичности, без учета потерь тепла. Истинный объем α (при данном типе возмущения) может быть только меньше, а плотность — больше приведенных величин.

По мере дальнейшего хода процесса включается взаимное притяжение слоев сжатого вещества.

Давление на фронте ударной волны создается за счет потока количества движения падающего вещества. Давление в средней плоскости между двумя волнами (при $x=0$) в рассматриваемом случае больше давления ударной волны на величину гравитационного давления, равного

$$P_g = \frac{\pi}{2} G \sigma^2, \quad (14.3.14)$$

где σ — поверхностная плотность (g/cm^2) всего слоя (от $-\mu$ до $+\mu$, с учетом вещества слева и справа от начала координат).

По мере увеличения количества сжатого вещества увеличивается отношение гравитационного давления к давлению ударной волны.

Численные расчеты Дорошкевича и Шандарина (1973) показывают, что при $t \sim 4t_c$ процесс практически замирает, сжатое вещество удерживается тяготением, падение вещества приостанавливается. Понадобилось бы нереально большое время для того, чтобы волна сжала все вещество, а между тем в сжатом веществе начинаются новые процессы излучения, рождения звезд и т. д., не учтенные в схематической картине одномерного сжатия.