В таком виде результат приведен в тщательно выполненной работе Сакса и Вольфа, цитированной выше, как итог довольно сложных расчетов в рамках ОТО. Отметим, что в этой работе гравитационное смещение содержит коэффициент 1/3. До сих пор не ясно, как классически истолковать этот коэффициент. Применение изложенных принципов к адиабатическим возмущениям большого масштаба, к вихревым возмущениям, к гравитационным волнам имеет в каждом случае свои специфические особенности, которые обсуждаются вместе с конкретными физическими результатами в следующих параграфах.

§ 5. Обнаружение возмущений плотности с помощью реликтового излучения

Рассмотрим возмущение плотности, но не слишком большого масштаба ($10^{13}M_\odot$—$10^{23}M_\odot$) и малой амплитуды. Нижний предел интервала соответствует наименьшему не затухающему из-за диссипации масштабу при $t_{\text{рек}}$, верхний предел соответствует горизонту ct_0, t_0 — сегодняшний момент. Для простоты сначала примем $\Omega=1$. Естественно предположить, что спустя достаточное время после рекомбинации мы имеем дело с растущим возмущением: если, например, в момент рекомбинации растущие ($\sim t^{2/3}$) и убывающие ($\sim t^{-1}$) возмущения были представлены с амплитудой одного порядка, то к настоящему времени амплитуда убывающих возмущений окажется ничтожно малой по сравнению с амплитудой растущих возмущений. Из того факта, что мы имеем дело с растущими возмущениями, вытекают два следствия.

Первое — вполне определенное соотношение между амплитудой и фазой возмущения плотности, с одной стороны, и амплитудой, направлением и фазой пекулярной скорости, с другой стороны. Если записать k-ю фурье-компоненту возмущения плотности в виде

$$\frac{\rho-\bar\rho}{\bar\rho}=\delta_k(t)\sin[\boldsymbol{k}_0(t)\boldsymbol{x}+\psi_k]=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}\delta_{0k}\sin\left[\boldsymbol{k}_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}\boldsymbol{x}+\psi_k\right], \tag{15.5.1}$$

то скорость

$$\boldsymbol{u}=\frac{2}{3}\delta_{0k}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3}\frac{\boldsymbol{k}_0}{t_0k_0^2}\cos\left[\boldsymbol{k}_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}\boldsymbol{x}+\psi_k\right]. \tag{15.5.2}$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ — координата (измеренная в *см*, не сопутствующая), $\delta_{0к}$ и k_0 — постоянные величины, t_0 — сегодняшний возраст Вселенной ($\sim 10^{10}$ *лет*). Рассматриваем плоский мир, $\Omega=1$, $H=75$ *км/сек*·*Мпс*. Итак, сегодняшней амплитуде плотности $\delta_{0к}$ соответствует также сегодняшняя амплитуда скорости

$$|u|_{\max}\Big|_{t=t_0}=c\delta_{0k}\left(\frac{M}{4\cdot 10^{23}M_\odot}\right)^{1/3}=4\cdot 10^2\delta_{0k}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/3}\ (\textit{см/сек}),$$

причем скорость направлена по волновому вектору возмущения *). Выражение $|u|_{max}$ записано в виде, явно выделяющем масштаб горизонта ct_0, охватывающий $M=4\cdot 10^{23}M_{\odot}$.

Второе следствие заключается в том, что в растущем возмущении максимальное воздействие на РИ оказывает ближайший к сегодняшнему дню период. По этой причине также не существенно, имели ли мы дело до рекомбинации с адиабатическими или энтропийными возмущениями, лишь бы они давали растущую моду возмущений в нейтральном газе (после рекомбинации) одинаковой амплитуды. Этот принцип можно распространить и на возмущения плотности, появляющиеся во втором (нелинейном) порядке из вихревых возмущений, но здесь влияние первого порядка вихревых возмущений скорости может оказаться больше.

Итак, мы рассматриваем движение вещества, заданное формулами (15.5.1), (15.5.2), на фоне РИ, которое в первом приближении однородно и изотропно **).

Перейдем от отдельной волны к статистической совокупности волн. Нужно сложить (векторно!) скорости, обязанные возмущениям всех длин волн.

По определению

$$\delta_k(M)=\sqrt{\delta_k^2\cdot\frac{4}{3}\pi k^3},\qquad \text{где}\qquad M=\rho\left(\frac{\pi}{k}\right)^3, \tag{15.5.3}$$

причем

$$\overline{\delta^2(M)}=\frac{4\pi}{3}\int_0^k \delta_k^2 k^2\,dk=\int_M^\infty \delta_k^2(M)\,d\ln M. \tag{15.5.4}$$

Здесь $\overline{\delta^2(M)}$ есть среднеквадратичное уклонение плотности от средней в масштабе, большем заданного нижним пределом M. Отсюда получим вероятное значение скорости в большом масштабе:

$$\sqrt{\overline{u^2}}=c\sqrt{\int \delta_k^2(M)\left(\frac{M}{4\cdot 10^{23}M_{\odot}}\right)^{2/3} d\ln M}. \tag{15.5.5}$$

---

*) В момент рекомбинации, от которого мы начинаем рассмотрение возмущения, плотности и скорости находятся не в том соотношении, которое соответствует чистому растущему возмущению. Поэтому первично возникает суперпозиция растущих и падающих возмущений.

**) Существенно ограничение масштаба длиной волны меньше ct_0, массой меньше 10^{23} $M_{\odot}$. В большем масштабе (этот случай будет рассмотрен отдельно) существенно увлечение РИ вместе с веществом. Возмущение, масштаб которого превосходит горизонт $\lambda>ct_0$, ненаблюдаемо в пределе $\lambda\gg ct$, так как соответствует отличию плотности в точке наблюдения от плотности в области, принципиально ненаблюдаемой. Чтобы отразить это обстоятельство, можно при вычислении амплитуды скорости [см. далее (15.5.5)] либо ограничить интегрирование верхним пределом $M_{23}=\frac{M}{10^{23}M_{\odot}}=1$, либо заменить под интегралом M^2 например на $\frac{M^2}{1+(M/M_{23})^4}$.

Итак, главное возмущение изотропии наблюдаемого нами РИ зависит от сегодняшнего пекулярного движения самого наблюдателя! Получающаяся при этом угловая зависимость РИ дается простейшим выражением:

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{u}{c}=\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0\cos\theta', \qquad (15.5.6)$$

где θ' — угол между направлением наблюдения и направлением пекулярной скорости. Наблюдения угловой зависимости интенсивности РИ (его температуры) проводят обычно с помощью антенны, неподвижно зафиксированной относительно Земли. При таком способе действий устраняется ряд экспериментальных ошибок, что существенно для достижения максимальной чувствительности.

Антенна прочерчивает на небесной сфере окружность по мере вращения Земли. Непосредственно измеряется зависимость температуры от времени; эту зависимость разлагают в ряд Фурье, как функцию с периодом в одни звездные сутки, усредняя данные многих суток наблюдений. Рассматриваемый выше тип возмущений, зависящий от сегодняшней пекулярной скорости, соответствует 24-часовой гармонике:

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{|u|}{c}\sin\varphi\sin\psi\cos\left(\frac{2\pi t_{\text{часы}}}{24}+\alpha\right)=a\cos\left(\frac{2\pi t}{24}+\alpha\right), \qquad (15.5.7)$$

где φ — угол между вектором скорости и осью вращения Земли, ψ — угол между направлением приема антенны и осью вращения Земли.

Наиболее точные измерения дают (полагаем ориентировочно $\sin\varphi\sin\psi\sim 0{,}5$) $\frac{|u|}{c}\approx 10^{-3}$. Неприятная особенность этих измерений заключается в том, что возмущения различного масштаба (например, движение Солнечной системы в Галактике и движение Галактики в местной группе) дают один результирующий вектор скорости. В рассматриваемом приближении угловая зависимость не позволяет разделить вклад в общий вектор скорости отдельных причин.

Тесно связана с предыдущим и вторая трудность. Точное измерение изотропии РИ проводится только в одной точке Вселенной. Насколько статистически весомым является результат? Не может ли измеренное на Земле значение $|u|$ (или верхняя граница, $|u|<300$ *км/сек*) быть результатом случайной компенсации вклада различных возмущений именно для нашей Галактики, для Земли?

Ответ на этот вопрос может быть только вероятностным. Можно найти вероятность того, что при большой средней (по Вселенной) пекулярной скорости случайно скорость Галактики оказалась малой. При этом весьма существенно, что в принципе измерение скорости есть измерение трех компонент вектора и эти три компоненты статистически независимы. Пусть среднеквадратичное значение пекулярной скорости по Вселенной равно u_0 и вероятность найти данное значение скорости u определяется нормальным законом. Тогда

$$dW = p(u_x, u_y, u_z)\,du_x\,du_y\,du_z =$$
$$= \left(u_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)^{-3} \exp\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{u_0^2}\right)\right] du_x\,du_y\,du_z. \quad (15.5.8)$$

Вероятность того, что скорость меньше u_1, где $u_1 \ll u_0$, есть

$$W(u_1) = p(0,\ 0,\ 0)\,\frac{4\pi}{3}u_1^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{u_1}{u_0}\right)^3. \quad (15.5.9)$$

Высокий показатель степени, равный трем, как раз и получается за счет трехмерности мира (и трех независимых компонент). С небольшой нестрогостью можно сказать, что с вероятностью лучше 0,999 среднее u_0 меньше $10^{-2}c$. Если на Земле измерено $|u| < 10^{-3}c$, то с вероятностью лучше 0,93 среднее u_0 меньше $2{,}5\cdot 10^{-3}c$. В действительности в настоящее время мы плохо знаем проекцию скорости на полярную ось, большая часть измерений относится к проекции скорости на плоскость экватора.

В пределе, если о полярной компоненте ничего не известно, оценки ухудшаются: получим $W(u_1) \sim \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2$ (степень 2, так как две компоненты); с достоверностью 0,999 найдем $u_0 < 3\cdot 10^{-2}c$; с достоверностью 0,93 найдем $u_0 < 4\cdot 10^{-3}c$ (при тех же условиях, что и выше). Крайне желательно, чтобы были преодолены экспериментальные трудности и выяснена изотропия РИ на всей небесной сфере. Эта задача важна и в связи с некоторыми анизотропными космологическими моделями (см. раздел IV).

Важнейший вывод из предыдущего заключается в том, что в плоской космологической модели ($\Omega = 1$) сегодняшняя амплитуда возмущений плотности в масштабе горизонта, несомненно, меньше 0,01. Между тем в масштабах скоплений галактик сегодняшняя амплитуда гораздо больше единицы. Следовательно, спектр возмущений, несомненно, является падающим. Исследование РИ наносит решительный удар по концепции иерархической структуры: в этой концепции предполагается, что галактики образуют скопления, скопления образуют сверхскопления, сверхскопления образуют сверхсверхскопления и т. д., так что в каждом масштабе амплитуда плотности порядка единицы.

Уточним логическую сторону этого опровержения. В его основе, кроме наблюдения изотропии РИ, лежат еще и общие представления об эволюции горячей Вселенной от состояния большой плотности до современного состояния. Эти представления также в конечном счете основаны на наблюдениях, и прежде всего на наблюдениях спектра РИ.

Прямое исследование распределения скоплений галактик по небесной сфере, проделанное Цвикки, Герцогом и Вилдом (1968), Ю и Пиблсом (1969), Пиблсом (1973б, 1974а), Хаузером и Пиблсом (1973) (см. § 11 гл. 14), также подтверждает отсутствие структурных единиц выше $M \sim 10^{14} M_{\odot}$, что противоречит идее иерархической структуры. Однако исследование РИ приводит к тому же выводу с большей точностью и надежностью.

В заключение заметим, что возмущения скорости в принципе можно измерять по наблюдениям далеких галактик, а не РИ. Относительные скорости удаленных галактик измеряются и непосредственно по смещению спектральных линий. Однако использование этих измерений для характеристики возмущений затруднено, так как главная часть измеряемого эффекта связана с невозмущенным хаббловским красным смещением. Чтобы найти пекулярную скорость, нужно вычесть хаббловскую скорость, пропорциональную расстоянию. Очевидно, что такая процедура весьма неточна и оценки получаются грубые. Не следует думать, что ошибка в определении пекулярной скорости соответствует неточности, с которой известна постоянная Хаббла (75 ± 25 *км/сек·Мпс* по данным до 1972 г.; 53 ± 5 *км/сек·Мпс* по данным Сэндиджа 1972 г., см. § 9 гл. 3). В определении H труднее всего бороться с систематическими ошибками, в особенности в связи с многоступенчатой системой определения шкалы расстояний. Именно с изменением шкалы были связаны драматические скачки от $H = 560$ *км/сек·Мпс* в 1930 г. к современным значениям.

Для характеристики возмущений достаточно найти среднеквадратичное уклонение скорости галактик от средней кривой зависимости $z - m$ в пределах однотипного ряда наблюдений. Такая кривая и положение отдельных точек измерений даны на рис. 18 из статьи Сэндиджа (1972б).

Приписывая все уклонения от прямой пекулярным скоростям, получим по данным работ Сэндиджа (1972б, в), что среднеквадратичное уклонение составляет округленно $\overline{u'} \leqslant 0{,}04 u_н = 0{,}04 Hr$ ($u_н = Hr$ — хаббловская скорость) во всем интервале $0{,}03 < z < 0{,}5$, т. е. для r от $0{,}03 \frac{c}{H}$ до $0{,}5 \frac{c}{H}$ [новые данные см. Сэндидж, Тамман (1974д)]. Из этих данных получаем, что изменения плотности вследствие растущих возмущений порядка

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{t_0 u'}{\lambda} \sim \frac{u'}{Hr} \leqslant 0{,}04. \qquad (15.5.10)$$

Итак, мы получили ограничение на флуктуации плотности большого масштаба из оценки отклонений скоростей удаления скоплений от кривой Хаббла. Для наибольшего масштаба это ограничение на порядок или полтора слабее того ограничения, которое вытекает из исследования анизотропии РИ. Однако большим преимуществом метода красных смещений галактик является то, что используется много отдельных измерений (практически около 100), тогда как скорость по РИ измеряется для одного только объекта. Поэтому представляется, что метод красных смещений хоть и менее чувствителен, но более надежен (правда, это интуитивное ощущение нелегко выразить в числах).

§ 6. Спектр возмущений и гиперболическая модель с малой плотностью

Измерения РИ приводят к важнейшему выводу относительно малости амплитуды наиболее длинноволновых возмущений: $\delta(M)\leqslant 10^{-3}$ для $M\sim 10^{23}M_{\odot}$, $\lambda\sim ct_0$; $\delta(M)\leqslant 10^{-2}$ для $M\sim 10^{20}M_{\odot}$, $\lambda\sim 0{,}1ct$; $\delta(M)\leqslant 10^{-1}$ для $M=10^{17}M_{\odot}$, $\lambda\sim 0{,}01ct_1$, причем $ct_0\sim 5000$ *Мпс*. Наконец, для $10^{14}M_{\odot}$ получим $\delta(M)\leqslant 1$.

Здесь возмущения плотности $\delta(M)$ приведены для настоящего времени. Но скопления галактик с массами порядка 10^{13}—$10^{14}M_{\odot}$, несомненно, существуют и достаточно рельефно выделяются на картах неба в настоящее время. Есть основания полагать, что они образовались не позднее $z_{\text{ск}}\sim 2$ или 4. Это означало бы, что в линейной теории $\delta(M_{\text{ск}})\sim 1$ при этом $z_{\text{ск}}$ (здесь $M_{\text{ск}}$— масса скопления), а значит, сегодня ($z=0$) экстраполированное по линейной теории $\delta(M_{\text{ск}},\ z=0)\geqslant 3$—5.

Таким образом, на первый взгляд налицо противоречие (хотя и не очень надежное) между оценками $\delta(M)$ по 24-часовым флуктуациям РИ и прямыми наблюдениями структуры Вселенной.

Вопрос о надежности наблюдений и их статистическом весе кратко обсуждался в предыдущем параграфе. Насколько надежна теория?

В основу были положены два предположения: а) малость возмущений, б) плоская модель с $\Omega=1$. Если возмущения не малы, то при $\delta\approx 1$ в соответствующем масштабе возникают гравитационно связанные образования; будем называть их скоплениями. В скоплении скорости составляющих его меньших структурных единиц подчинены теореме вириала, не возрастают с течением времени, так как рост возмущений прекращается, но и не убывают в ходе расширения. Таким образом, вывод линейной теории при $\delta>1$, очевидно, уже неприменим и никакого противоречия не возникает.

После образования скоплений нужно рассматривать в рамках линейной теории возмущения большего масштаба, но еще малой амплитуды, для которых скопления являются атомами газа.

Однако еще более важно изменение теории при отказе от рассмотрения плоской модели. Напомним, что оценка массы вещества