Перечисленные 10 пунктов в основном исчерпывают содержание данной главы. Общий вывод, хотя и неокончательный, скорее неутешителен для любителей сенсаций; устанавливается ряд неравенств, ограничивающих плотность гравитационного излучения. Однако ударение следует сделать на тех областях спектра, которые остаются неизученными в настоящее время. В предлагаемой главе намечается программа дальнейших исследований и обсуждаются пути и методы исследования.

Порядок расположения следующих параграфов не соответствует расположению перечисленных 10 пунктов.

§ 2. Общие сведения о гравитационных волнах

В пустом пространстве ($T_{ik}=0$) возможно решение уравнений ОТО с метрикой вида

$$ds^2=c^2\,dt^2-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu,\quad g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(t,\ \boldsymbol{x}),\tag{16.2.1}$$

соответствующей слабовозмущенной метрике Минковского. Систему координат можно выбрать таким образом, что уравнения Эйнштейна $R_{ik}-\frac{1}{2}\,g_{ik}R=0$ в линейном по $h_{\mu\nu}$ приближении приводят к уравнениям для $h_{\mu\nu}$ вида

$$\Box\,h_{\mu\nu}=0.\tag{16.2.2}$$

Элементарные решения этого уравнения суть

$$h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})=h_{\mu\nu}^{(0)}e^{ikx-i\omega t},\quad \omega=c\,|\boldsymbol{k}|.\tag{16.2.3}$$

Координатные условия, обращающие уравнения Эйнштейна в уравнения (16.2.2), позволяют наложить еще следующие условия на $h_{\mu\nu}$:

$$h_\mu^{\mu(0)}\equiv h=0,\quad h_{\mu\nu}^{(0)}k^\mu=h_{\mu\nu}^{(0)}k^\nu=0.\tag{16.2.4}$$

Четыре условия (16.2.4) для $h_{\mu\nu}$ образуют четыре связи, оставляя из шести компонент независимыми только две. Эти две компоненты характеризуют два состояния поляризации плоской гравитационной волны.

Элементарные решения (16.2.3) образуют полную систему (в смысле теории интеграла Фурье), любое решение может быть представлено в виде суперпозиции [линейной комбинации $\int h_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})\,d^3\boldsymbol{k}$] таких решений. При пользовании записью в комплексной форме подразумевается, что $h_{\mu\nu}$— вещественная часть комплексного выражения либо что все выражения удовлетворяют соотношению вида $C(\boldsymbol{k})=C^*(-\boldsymbol{k})$,— условие, обеспечивающее вещественность интеграла Фурье.

В частности, суперпозицией волн с параллельными $\boldsymbol{k}$ можно построить решение вида $h(\boldsymbol{nx}-t)$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор (равный $\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ для отдельных волн); зависимость h от аргумента функции произвольна, за исключением важного условия поперечности $h_{\mu\nu}k^{\nu}=h_{\mu\nu}k^{\mu}=0$ и $h_{\mu}^{\mu}=0$ в любой точке пространства.

Итак, гравитационная волна распространяется со скоростью света и является поперечной (по отношению к направлению распространения), что окажется существенным при рассмотрении взаимодействия с веществом. Метрика (16.2.1) является синхронной ($h_{00}=0$, $g_{00}=c^2$, $h_{0\alpha}=g_{0\alpha}=0$), что позволяет немедленно определить закон движения одной системы пробных частиц в поле волны: все $x^{\mu}(t)=\mathrm{const}$ являются решением, т. е. частицы покоятся в системе (16.2.1), так что изменения взаимных расстояний и относительное движение этих частиц полностью определяются изменением метрических коэффициентов.

В следующем порядке, квадратичном по $h_{\mu\nu}$, можно вычислить так называемый псевдотензор энергии-импульса гравитационных волн [см. Ландау и Лифшиц (1973)]. С помощью псевдотензора определяется плотность энергии ε_g и плотность потока импульса $p_{l,g}$ в гравитационной волне. Для плоской гравитационной волны, распространяющейся вдоль координаты x^1, соответствующее выражение имеет вид [из условия поперечности волны (16.2.4) в ней отличны от нуля лишь компоненты h_{22}, h_{33} и h_{23}, причем $h_{22}=-h_{33}$]

$$\varepsilon_g=\frac{p_{1,g}}{c}=\frac{c^2}{16\pi G}\left[(\dot{h}_{23})^2+\frac{1}{4}(\dot{h}_{22}-\dot{h}_{33})^2\right]. \qquad (16.2.5)$$

Как подчеркивают Ландау и Лифшиц, псевдотензор (в отличие от истинного тензора) можно обратить в нуль в любой точке путем преобразования координат, соответственно обратится в нуль и (16.2.5). Однако интеграл от псевдотензора энергии-импульса (от ε_g и $p_{1,g}$) по пространству, плоскому на бесконечности, имеет инвариантный смысл вектора энергии и импульса E, $\boldsymbol{p}$ гравитационного поля внутри рассматриваемого объема (где $h_{\mu\nu}$ отличны от нуля). При условии сохранения евклидовости на бесконечности вектор E, $\boldsymbol{p}$ не зависит от выбора координат.

Пакет почти плоских волн одного направления имеет $|\boldsymbol{p}|=\frac{E}{c}$. В соответствии с тем, что скорость гравитационных волн равна скорости света, масса покоя гравитонов равна нулю. Оговорка «почти» связана с тем, что ограниченность пакета в пространстве в направлениях, перпендикулярных x^1, требует наличия хотя бы малых компонент волнового вектора, перпендикулярных x^1.

Если же складываются волны существенно различных направлений, то $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ складываются векторно, $E=E_1+E_2$ складываются скалярно и в результате $E>c|p|$, $E^2-c^2p^2>0$, совокупность волн разного направления обладает массой покоя. В случае гравитационной волны (одной или совокупности волн) можно ослабить требование к метрике на бесконечности и не требовать ее евклидовости. Достаточно рассматривать объем, все размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Усредненный по такому объему, псевдотензор обладает всеми свойствами обычного тензора энергии-импульса, такого, например, как максвелловский тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Это интуитивно очевидное свойство выведено строго и формально в работах Айзаксона (1968а, б) путем разделения метрики на быстро и плавно изменяющиеся компоненты. Это позволяет рассматривать гравитационные волны в искривленном фридмановском мире, их движение в поле тяготения изолированных тел и т. д. Для слабых гравитационных волн в мире Фридмана конкретные решения проведены в § 5 гл. 11. Мы их подробно проанализируем в следующем параграфе. Здесь же заметим, что волны с $\lambda \ll ct$ на промежутках времени много меньше t можно рассматривать как волны в плоском неэволюционирующем мире. Поэтому мы прежде всего рассмотрим этот случай.

Для элементарной монохроматической волны

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\,(\alpha_k h^{(1)}_{\mu\nu} + \beta_k h^{(2)}_{\mu\nu})\, e^{ikx - ic|k|t}, \tag{16.2.6}$$

где $h^{(1)}_{\mu\nu}$ и $h^{(2)}_{\mu\nu}$ — два единичных тензора, отвечающие двум состояниям поляризации, дающие нуль при свертке с вектором $\boldsymbol{k}$. Имеем после усреднения по периоду волны

$$\varepsilon_g = \frac{c^2\omega^2}{32\pi G}(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) = \frac{p_{1,g}}{c}. \tag{16.2.7}$$

Для хаотического распределения волн по направлениям (в среднем изотропного, без выделенного направления) поток энергии обращается в нуль, а пространственные компоненты псевдотензора дают изотропное («паскалевское») давление. В итоге получаем

$$\bar{\varepsilon}_g = \overline{3P}_g = \frac{c^2\omega^2}{32\pi G}\int (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)\frac{d\Omega}{4\pi}. \tag{16.2.8}$$

В уравнения Эйнштейна для плавно меняющейся части метрики величины ε_g и P_g входят, наряду с соответствующими величинами для «обычной» материи, в правую часть. Подчеркнем, что в уравнения ОТО ε входит с коэффициентом G. Отсюда следует, что при подстановке ε_g и P_g, выраженных через высокочастотные возмущения метрики, гравитационная постоянная сократится, как и следует ожидать.

Связь между плавно меняющимися и высокочастотными нелинейными компонентами метрики есть результат нелинейности уравнений Эйнштейна для пустоты, но в этих последних уравнениях никаких констант нет, так как правая часть равна нулю (в точных уравнениях до усреднения высокочастотной части по многим длинам волны и перенесения результата в правую часть в виде ε_g и P_g).

Обратимся к космологическим гравитационным волнам.

В космологической задаче в изотропном (в среднем) мире, заполненном одним только гравитационным излучением с частотой ω, по порядку величины имеем следующее уравнение эволюции (индексы опускаем):

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}=\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2=\omega^2\alpha^2\approx(\dot{h})^2. \tag{16.2.9}$$

Следовательно, достаточно малой амплитуды возмущений метрики:

$$h\sim\frac{1}{\omega t_0}\sim\frac{H}{\omega}, \tag{16.2.10}$$

где t_0 — время с начала расширения, H — постоянная Хаббла ($\sim 10^{-18}$ *сек*), для того, чтобы возникли сильные космологические эффекты. Из (16.2.9) следует, что для $\omega=1$ *сек*$^{-1}$ сильный эффект возникает при $h\sim 10^{-18}$, для $\omega=10^3$ *сек*$^{-1}$ (резонансная частота детекторов Вебера) — при $h\sim 10^{-21}$ и для $\omega=10^{10}$ *сек*$^{-1}$ (средняя частота реликтового излучения) — при $h\sim 10^{-28}$. Малость безразмерного h как раз и характеризует невозможность обнаружения космологических гравитационных волн прямыми методами даже тогда, когда они играют большую роль в космологии. С другой стороны, для самых длинных волн — с длиной волны порядка горизонта — нужна амплитуда порядка единицы для заметного космологического влияния. Поскольку для таких волн нет никаких безразмерных величин, отличающихся от единицы, то и влияние их на излучение, приходящее с горизонта, порядка единицы. Мы увидим ниже, что наблюдаемая изотропия реликтового электромагнитного излучения исключает возможность существования длинных гравитационных волн с амплитудой порядка единицы при длине волны порядка горизонта Вселенной. Как уже подчеркивалось, изотропное гравитационное излучение с длиной волны $\lambda\ll ct$ составляет релятивистский «газ» с $\varepsilon_g=\frac{1}{3}P_g$ и при расширении Вселенной ведет себя вполне аналогично фотонному газу: $\varepsilon_g\sim a(t)^{-4}$, длина волны $\lambda\sim a(t)$. Наряду с той оценкой h, которая дана выше, интересно рассмотреть также $\dot{h}$ и $\ddot{h}$. Из формулы (16.2.9) сразу видно, что $\dot{h}$ порядка постоянной Хаббла, если гравитационные волны дают главный вклад в плотность Вселенной и мир является замкнутым или плоским, $\Omega\geqslant 1$. Если же $\Omega\ll 1$ и (или) $\varepsilon_g\ll\varepsilon$, то $\dot{h}\ll H$.

В гравитационных волнах непосредственно наблюдаемой величиной является $\ddot{h}_{\mu\nu}$. Действительно, в любом гравитационном поле можно измерять только относительные ускорения частиц, которые пропорциональны второй производной от $h_{\mu\nu}$. Выберем направление волны вдоль x^1. Тогда, согласно выражениям (16.2.1), (16.2.3) и (16.2.4), частицы, расположенные перпендикулярно к оси x^1, будут испытывать относительные колебания. Амплитуды этих колебаний суть $\frac{dl}{l} \approx \alpha_k$, $\beta_k \approx h$, где l — расстояние между частицами. Период этих колебаний есть ω. Относительные ускорения частиц, которые могут возникать в космологических гравитационных волнах, ничтожны. Так, для примера, положим $\omega = 10^3$ *сек*$^{-1}$. Мы видели выше, что максимальное h (приводящее к заметному влиянию на эволюцию Вселенной) есть $h = 10^{-21}$. Отсюда относительное ускорение частиц есть A (*см/сек*^{2})$\approx h\omega^2 l \approx 10^{-15}$ l (*см*).

Как уже отмечалось, хаотический (изотропный в среднем) набор коротких гравитационных волн ведет себя во фридмановской Вселенной как идеальный ультрарелятивистский газ с уравнением состояния $P = \varepsilon/3$. Следовательно, $\varepsilon \sim [a(t)]^{-4} \sim (1+z)^4$. Для каждого отдельного колебания длина волны пропорциональна радиусу мира, $\lambda \sim a(t) \sim (1+z)^{-1}$, $\omega \sim (1+z)$. Имея в виду, что $\varepsilon \sim h^2\omega^2$, получим $h \sim a^{-1} \sim (1+z)$, амплитуда волны, выраженная через безразмерное изменение метрики (индексов не пишем), с течением времени падает. Наконец, во время эволюции остается постоянным адиабатический инвариант — отношение энергии волны (в данном сопутствующем объеме) к ее частоте. Этот адиабатический инвариант имеет смысл числа квантов, в данном случае числа гравитонов. Число гравитонов при расширении сохраняется (как для отдельной волны, так и для всего газа) в адиабатическом периоде, когда частота волны больше постоянной Хаббла и длина волны меньше горизонта.

Изотропное хаотическое распределение волн остается изотропным в изотропно расширяющейся Вселенной, однако при любых отклонениях Вселенной как целого от фридмановской однородной и изотропной модели немедленно проявится важнейшая особенность «газа», состоящего из гравитонов. Этот газ является бесстолкновительным, изотропия распределения волн по направлениям немедленно нарушается при анизотропном расширении Вселенной или при локально анизотропных воздействиях. Подробнее об этом см. в разделе IV.

В заключение этого параграфа еще раз подчеркнем принципиальную нелокальность гравитационных волн. Локально метрика везде и, в частности, в поле гравитационной волны может быть приведена к виду метрики Минковского; выбором координат в данной точке можно обратить в нуль символы Кристоффеля. Как известно, величины $R_{ik,lm}$ образуют тензор; в гравитационной волне эти величины отличны от нуля (пропорциональны $\ddot{h}$), хотя равны нулю некоторые их линейные комбинации, а именно R_{ik} и R. Специфика гравитационной волны заключается в том, что все инварианты, составленные из неисчезающих $R_{ik,lm}$, исчезают, равны нулю. Такое поведение локальных величин вызывало в прошлом общее недоверие к теории гравитационных волн. В настоящее время стал общепризнанным и общепонятным принцип нелокальности гравитационной волны. Парадоксы разъясняются при рассмотрении волны в области, вмещающей несколько длин волны. Для интересующихся подробностями вопроса рекомендуем наряду с классическим учебником Ландау и Лифшица «Теория поля» и монографиями перечесть главу о гравитационных волнах в ТТ и ЭЗ.

§ 3. Гравитационные волны в теории малых возмущений космологического решения

В гл. 11 была рассмотрена созданная Лифшицем теория эволюции малых возмущений, наложенных на однородное и изотропное (фридмановское) космологическое расширение.

Отмечалась возможность инвариантно классифицировать возмущения, разделяя их на скалярные (включающие возмущение плотности), векторные (вихревые) и тензорные.

Тензорные возмущения определены таким образом, чтобы из возмущения метрики и волнового вектора нельзя было построить ни скаляра, ни вектора. Этому соответствуют условия (16.2.4). Поэтому тензорные возмущения представляют собой гравитационные волны, а на ранней стадии, когда длина волны больше горизонта, тензорные возмущения есть «то, что с течением времени превратится в гравитационную волну». Рассмотрим подробнее законы эволюции тензорных возмущений и особенно этот переход «будущей» волны в «сущую» волну.

Проследим сперва за соотношением между горизонтом и длиной гравитационной волны. Длина горизонта *) порядка ct, длина волны пропорциональна $a(t)$, так что мгновенное значение $\lambda=\lambda_0 a^{-1}(t_0)a(t)$, где $a(t_0)$ и λ_0 относятся к произвольному моменту t_0. Как известно, $a(t)$ растет медленнее, чем t: как $t^{2/3}$ при $P=0$, как $t^{1/2}$ при $P=\varepsilon/3$ и как $t^{1/3}$ при $P=\varepsilon$. Поэтому для каждой волны можно найти t_1 такое, что при $t<t_1$ $\lambda<ct$, но при $t>t_1$ $\lambda>ct$. Например, для $P=\varepsilon/3$ $t_1=\lambda_0^2/ct_0$. Удобнее, однако, пользоваться величинами, выраженными в сопутствующей системе координат x, y, z, и с параметром η, заменяющим время:

$$ds^2=c^2\,dt^2-a^2(t)\,[dx^2+dy^2+dz^2]=a^2(\eta)\,[d\eta^2-dx^2-dy^2-dz^2],$$

$$d\eta=\frac{c\,dt}{a(t)}. \qquad (16.3.1)$$

*) Радиус мира нас не интересует! В частности, вблизи сингулярности все результаты для замкнутого, открытого и плоского мира одинаковы, так что можно рассматривать плоский мир с бесконечным радиусом, но конечным горизонтом.